

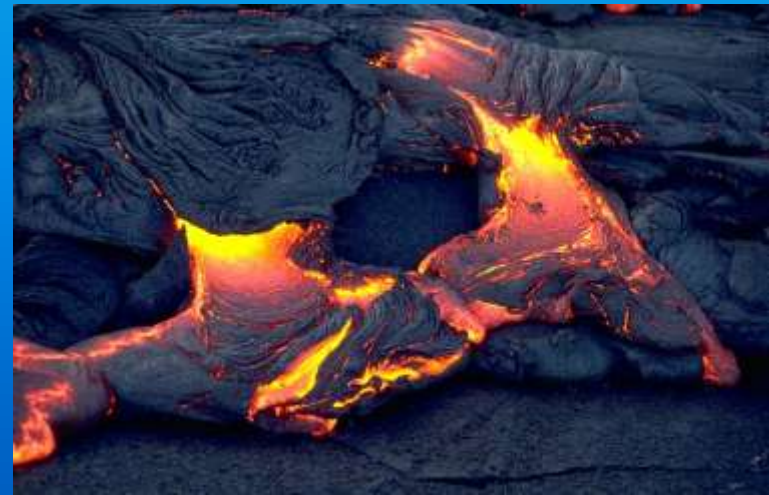
Základy kvantové fyziky 1

Problémy fyziky

- Koncem 19. století propadli fyzikové pocitu, že všechny důležité problémy jsou vyřešeny a že za krátkou dobu již nebude nad čím bádát.
- A opravdu existovaly pouze dva zdánlivě okrajové jevy, které dosud vzdorovaly jejich intelektuálnímu úsilí.
- Byly to:
 - záření absolutně černého tělesa
 - fotoelektrický jev (vnější)

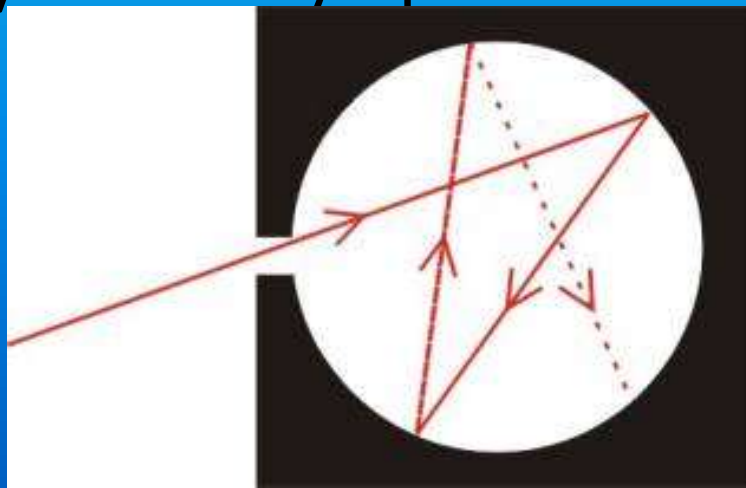
Záření absolutně černého tělesa

- Již v 18. století bylo objeveno, že tělesa vydávají jakési záření.
- Později bylo zjištěno, že se jedná o „směs“ elmg záření různých vlnových délek, které vzniká v důsledku tepelného pohybu částic – proto tepelné záření.
- Tepelné záření může obsahovat i viditelnou složku – světlo.



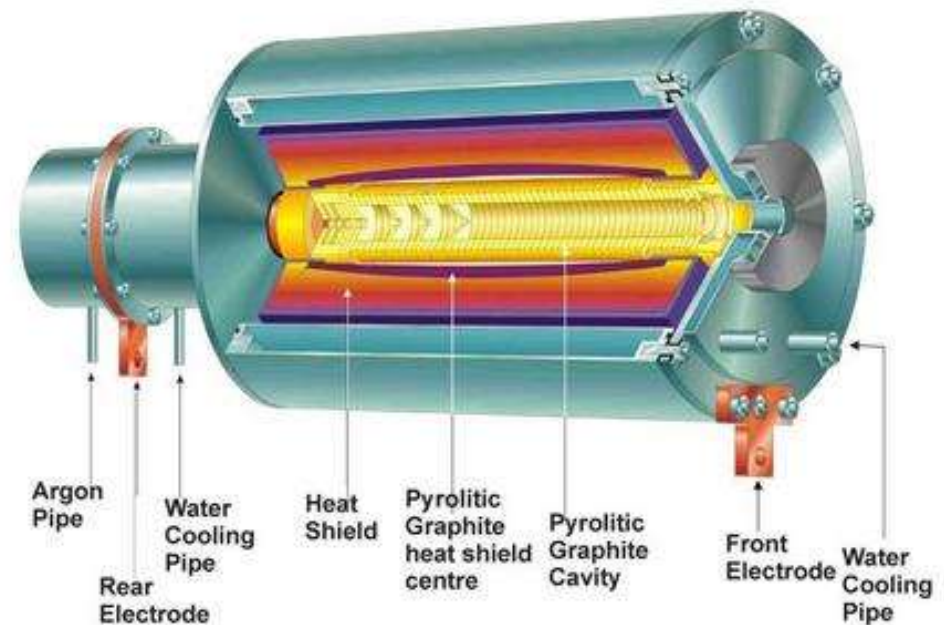
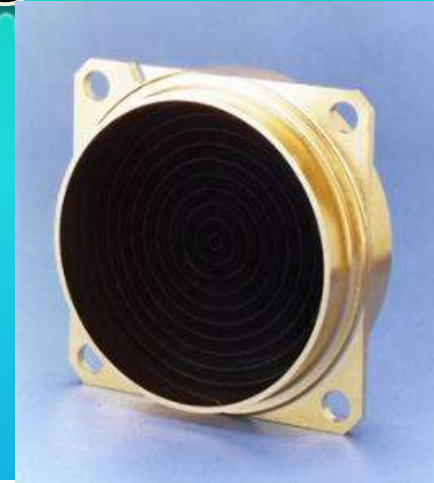
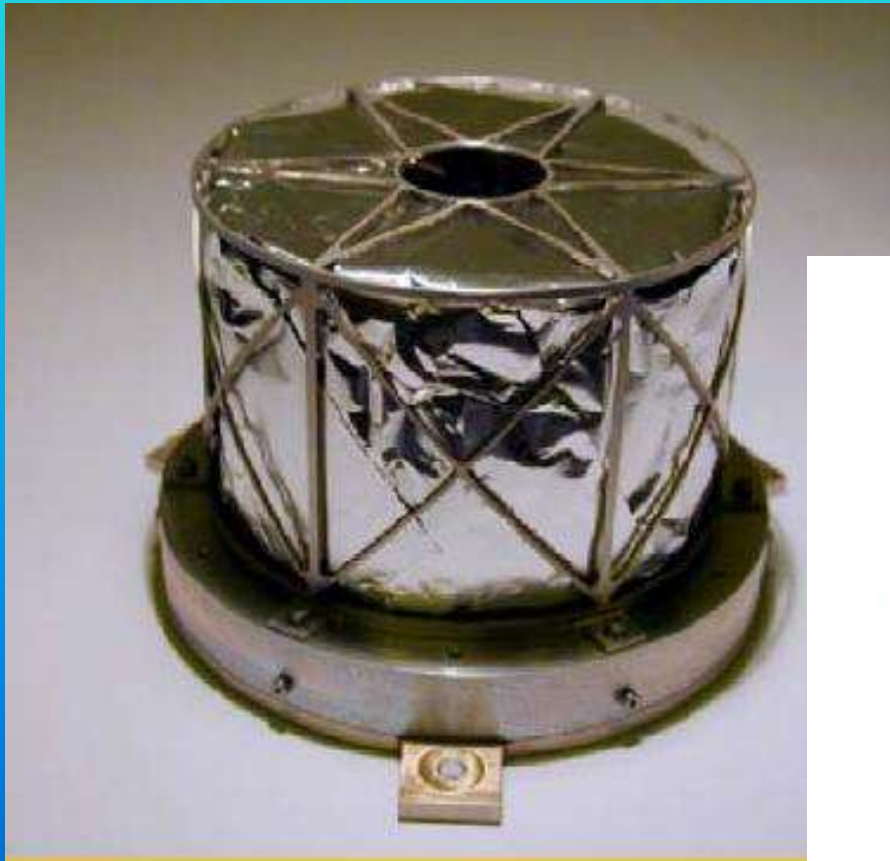
Absolutně černé těleso

- Budeme se zabývat tepelným zářením absolutně černé těleso (AČT).
- AČT je takové těleso, které všechno záření pohlcuje a žádné neodráží.
- Přesně takové těleso v praxi neexistuje.
- Pokud však vnitřek nějaké „krabičky“ pokryjeme sazemi a uděláme do ní otvor, tak se bude tento otvor svými vlastnostmi AČT velmi blížit.
- Než se totiž paprsek dostane ven, tak se mnohonásobnými odrazy úplně utlumí.



Absolutně černé těleso

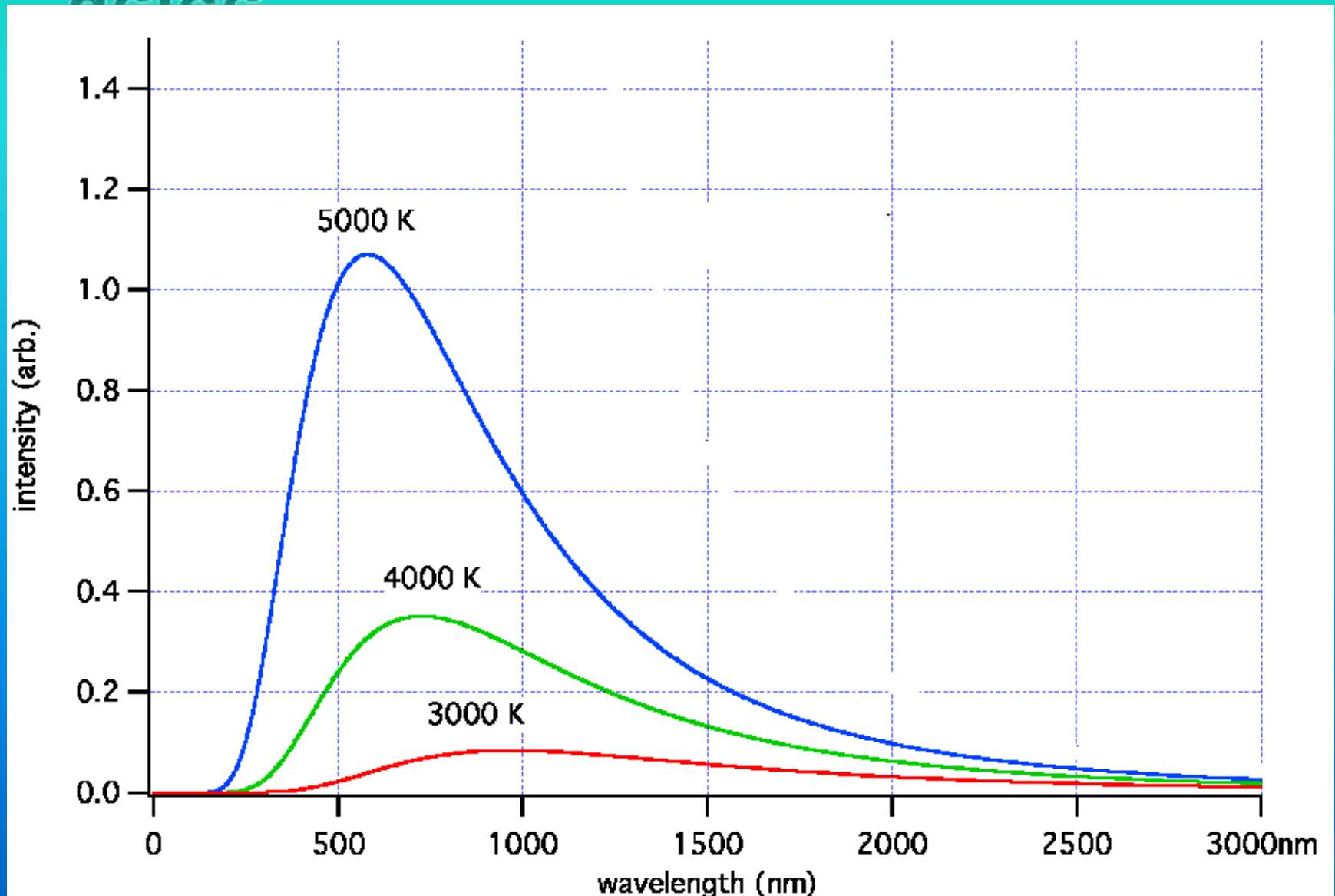
- praktické provedení AČT



Záření AČT

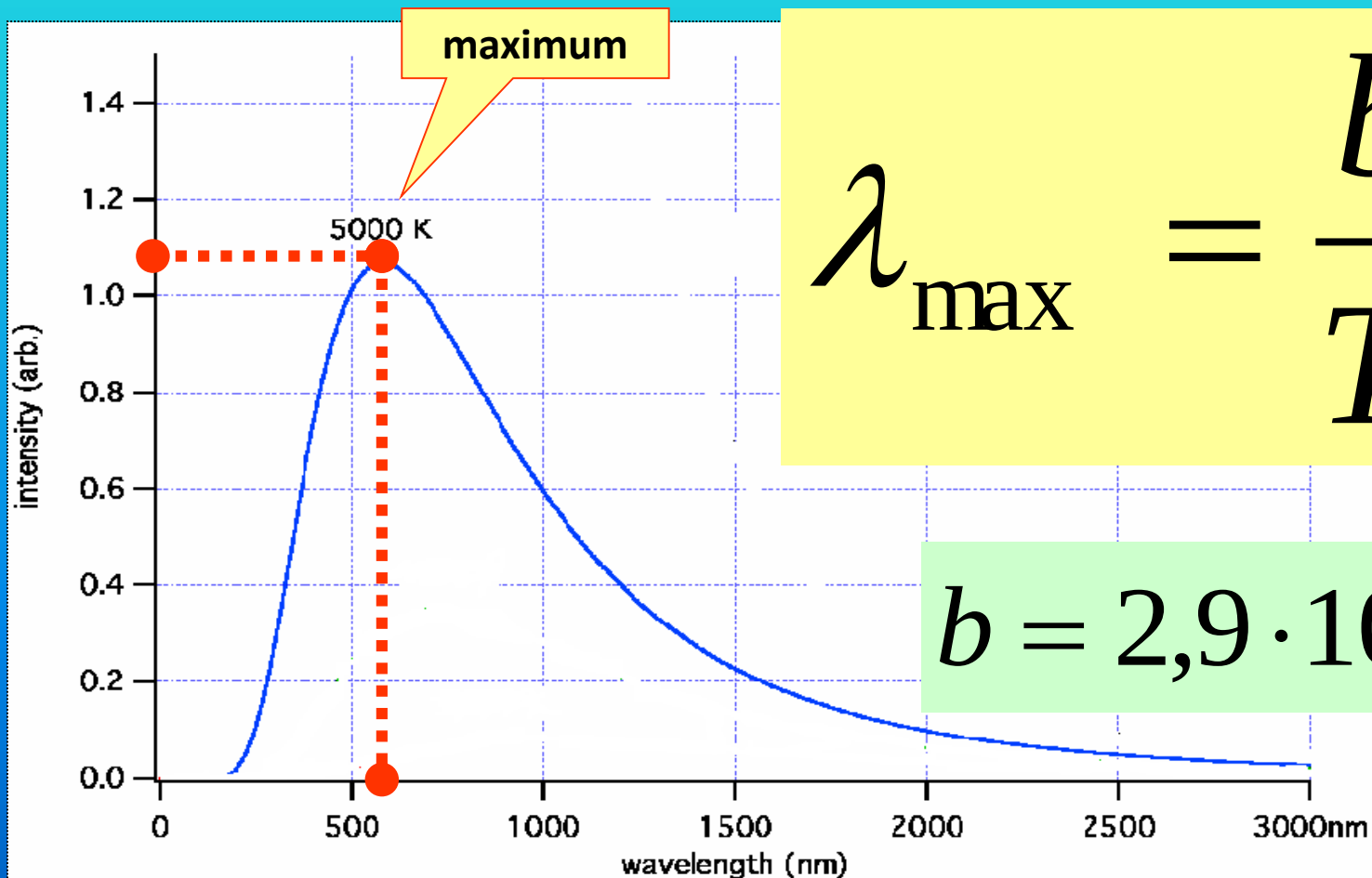
- Při zkoumání AČT nikoho nepřekvapilo, že krátkovlnného i dlouhovlnného záření je v jeho spektru málo a že většina energie se vyzařuje na určité vlnové délce a délkách jí blízkých.
- Graf závislosti intenzity záření na vlnové délce má tedy maximum, jehož poloha závisí na teplotě.
- [Simulace](#)

Závislost intenzity záření AČT na vlnové délce



Záření AČT

- Nejvíce energie se vyzařuje na vlnové délce splňující tuto podmínku:



$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$$

Zářivý výkon

- Celkový výkon P vyzařovaný na všech vlnových délkách z 1 m^2 (P) pak velmi silně závisí na teplotě:

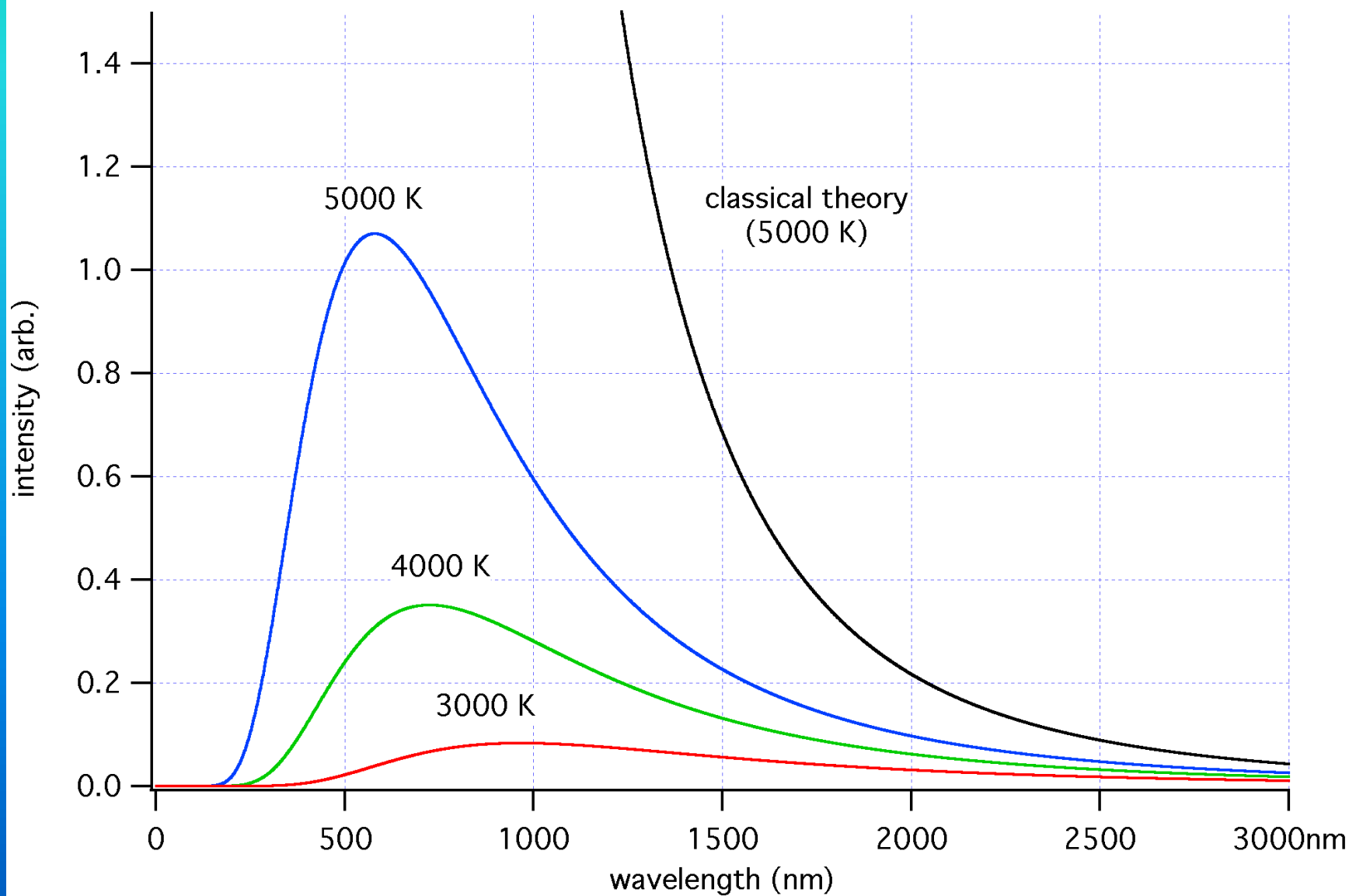
$$P = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Problémy

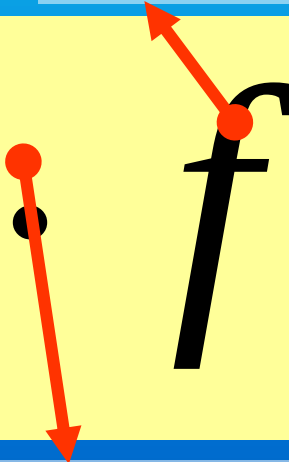
- Fyzikové se však dostali do problémů, když se snažili odvodit závislost intenzity záření AČT na vlnové délce teoreticky podle zákonů klasické fyziky.
- Vyšlo jim totiž, že intenzita záření by měla klesat se 4. mocninou teploty, což by znamenalo, že pro $\lambda \rightarrow 0$ by měla růst nade všechny meze (tzv. ultrafialová katastrofa).

Vyzařování AČT



Kvanta

- Problém vyřešil až Max Planck jen díky neobvyklému předpokladu, že atomy nevyzařují elmg energii spojitě, ale po určitých dávkách neboli kvantech - fotonech.
- Podle M. Plancka energie fotonu musí být dána tímto vztahem:

$$E = h \cdot f$$


frekvence fotonu

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Planckova konstanta

Planckova rovnice

- Planck pak napsal vyzařovací zákon ve tvaru, jenž již odpovídal experimentálně zjištěným údajům:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}$$

Boltzmannova konstanta

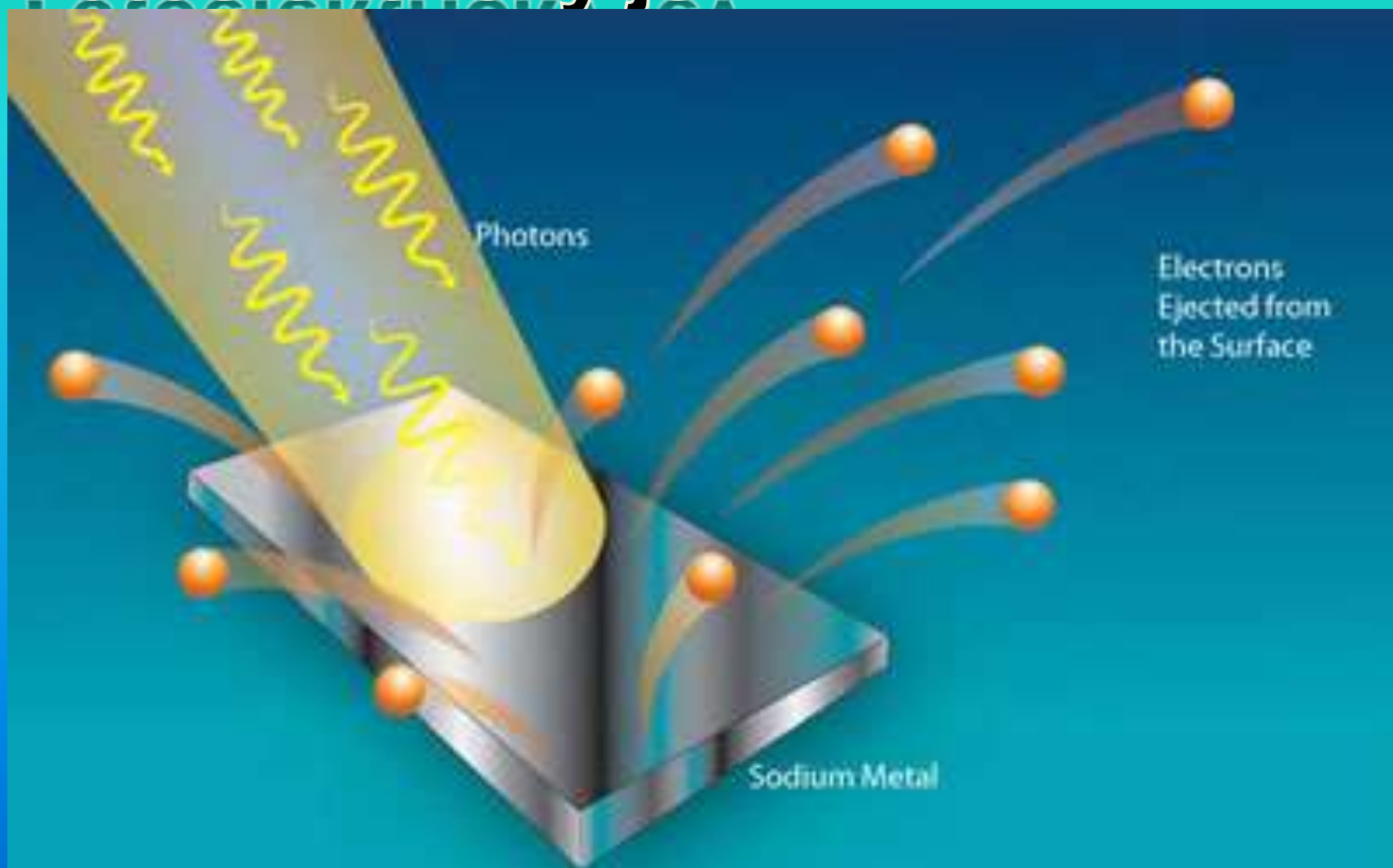
$$E(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kt}} - 1}$$

výkon vyzařovaný z 1 m² v rozmezí vlnových délek ($\lambda, \lambda+d\lambda$)

Foton

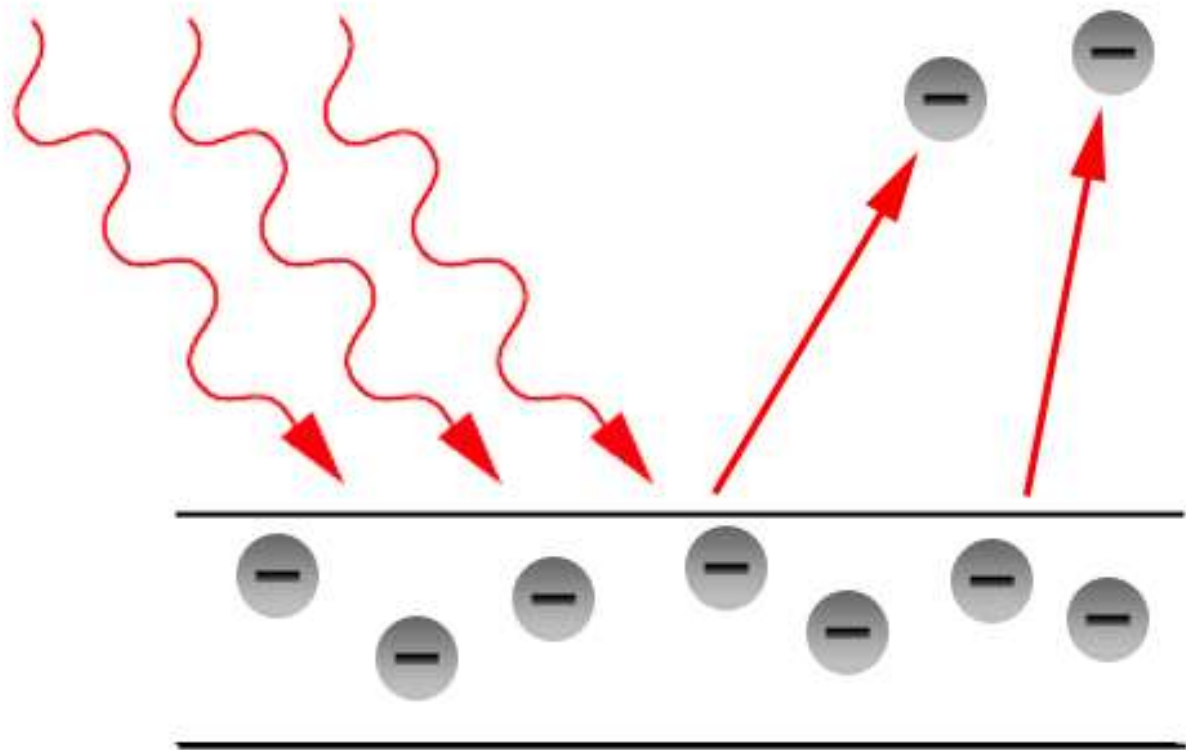
- Představa fotonu ještě klasickou fyzikou neotřásla – i kdyby světlo vznikalo po kvantech, je přece nepochybné, že se šíří i pohlcuje jako spojitá elmg. vlna.
- Otřes způsobila až aplikace této „berličky“ na fotoelektrický jev

Fotoelektrický jev



Fotoelektrický jev

- Když světlo dopadá na povrch kovu, tak z něho uvolňuje elektrony.
- [Animace](#)
- [Animace](#)



Problémy s vysvětlením

- Na „vyražení“ elektronu z kovu je potřeba určitá energie, kterou nazýváme výstupní prací (W).
- A světlo tuto energii má, takže se zdálo, že klasická fyzika nebude mít s vysvětlením tohoto jevu problémy.
- Avšak je-li světlo spojitá elmg vlna, tak zasáhne všechny elektrony, kterých je do hloubky několika atomárních vrstev obrovské množství.
- Na každý z nich tedy připadne tak malé množství energie, že by trvalo asi 10000 let, než by ji elektron nashromáždil dostatek k tomu, aby se dostal z kovu.

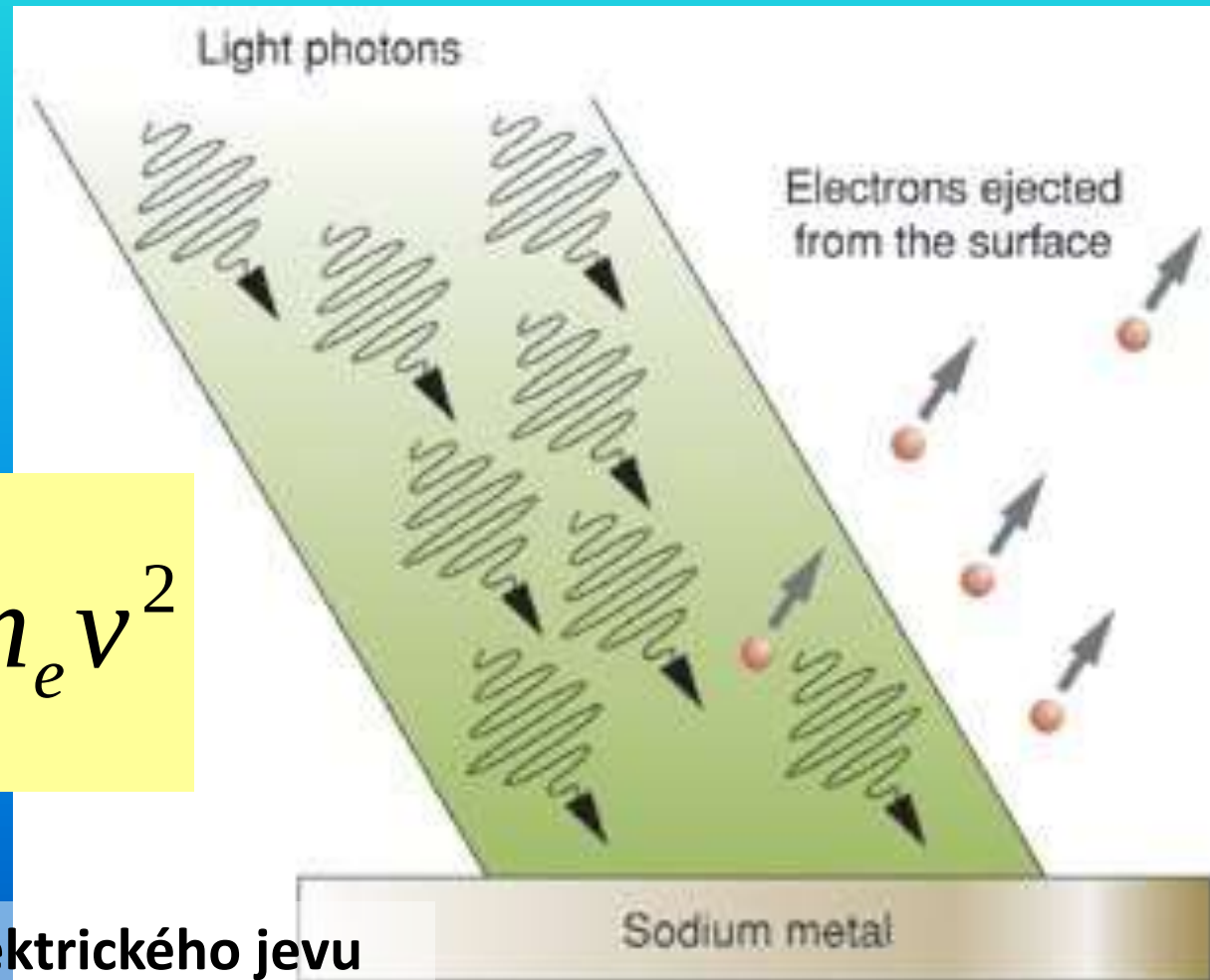
Světlo - částice

- Ovšem z toho, že elektrony vylétnou okamžitě, ale ne všechny, A. Einstein usoudil, že světlo nemůže zasahovat všechny body prostoru jako spojitá elmg vlna, ale musí být koncentrováno do jakýchsi „balíčků“ či kvant.
- Světlo se tedy po kvantech pouze nevyzařuje, jak předpokládal Planck, ale v kvantech se i šíří a pohlcuje.
- Světlo je tedy proud částic - fotonů.

Rovnice fotoel. jevu

- Energie fotonu pak pokryje výstupní práci a zbytek se přemění na kinetickou energii elektronu.

$$hf = W + \frac{1}{2} m_e v^2$$



Mohou nastat tři případy:

- energie fotonu je rovna výstupní práci

- fotoefekt právě nastane

$$hf = W$$



$$f = f_{\min} = \frac{W}{h}$$

minimální frekvence světla,
které ještě způsobí fotoefekt

- energie fotonu je menší než výstupní práce

- fotoefekt nenastane

$$hf < W$$



$$f < f_{\min}$$

- energie fotonu je větší než výstupní práce

- fotoefekt nastane a elektron opustí kov s nenulovou rychlostí

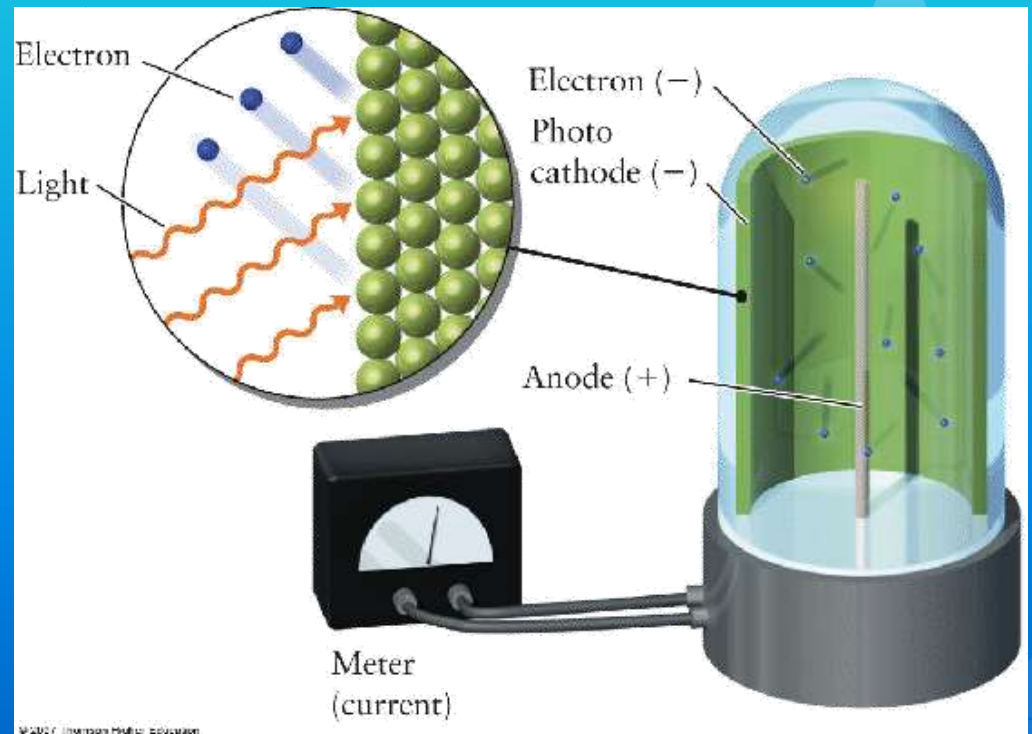
$$hf > W$$



$$f > f_{\min}$$

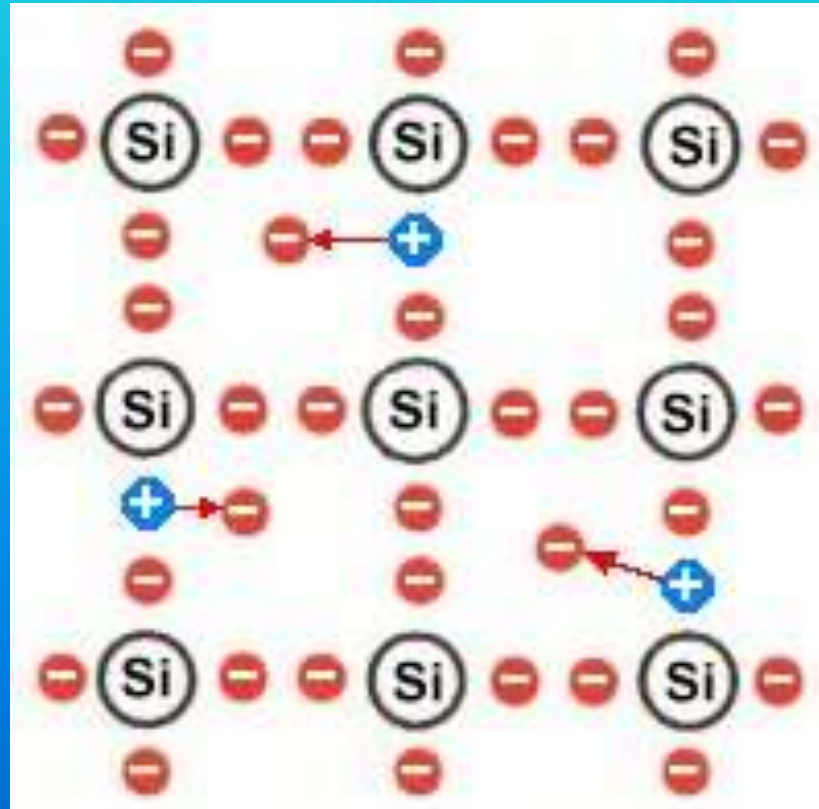
Využití fotoefektu:

- Ozáříme-li fotonku světlem, začne vést elektrický proud.
- světelné čidlo – fotonka



Vnitřní fotoefekt

- Poznámka: Fotoefekt (vnitřní) pozorujeme i u polovodičů, kde fotony generují díry a volné elektrony.



Co je světlo?

- Vlnový model používáme především v klasické optice a vysvětlujeme jím např. interferenci, lom, polarizaci světla atd.
- Světlo se tedy někdy chová jako vlnění, jindy jako proud částic.
- Pro mikrosvět je však světlo proudem částic – fotonů.
- **Oba modely platí zároveň, nevylučují se, ale doplňují.**

Vlastnosti fotonu:

- Foton má energii, a proto mu můžeme přisoudit i hmotnost:

$$E = hf$$

+

$$E = mc^2$$

$$hf = mc^2$$



$$h \frac{c}{\lambda} = mc^2$$



$$m = \frac{h}{c\lambda}$$

hmotnost fotonů (m_f), hmotnost fotonů v porovnání s hmotností elektronu (m_e)

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

foton	λ/nm	m_f/kg	m_f/m_e
fialového světla	400	$5,53 \cdot 10^{-36}$	$6,08 \cdot 10^{-6}$
UV záření	100	$2,21 \cdot 10^{-35}$	$2,43 \cdot 10^{-5}$
RTG záření	10	$2,21 \cdot 10^{-34}$	$2,43 \cdot 10^{-4}$
RTG záření	1	$2,21 \cdot 10^{-33}$	$2,43 \cdot 10^{-3}$
gama	0,1	$2,21 \cdot 10^{-32}$	0,0243
gama	0,01	$2,21 \cdot 10^{-31}$	0,243

Vlastnosti fotonu

- Hybnost fotonu:

$$p = mc = \frac{h}{c\lambda} \cdot c = \frac{h}{\lambda}$$

- Foton je „necitlivý“ na elektrické pole, a proto:

$$Q = 0$$

- Foton má tedy vlastnosti klasické částice s jedinou výjimkou
- Nemůže být v klidu, ani se nemůže pohybovat jinou rychlostí než rychlostí světla.

Comptonův jev

- Roku 1922 získal A. Compton přímý důkaz, že světlo je proud fotonů, když tvrdé (krátkovlnné) RTG záření nechal procházet uhlíkovou destičkou.
- Pozoroval, že z uhlíku pod různými úhly vyletovaly elektrony a vycházelo měkčí RTG záření.
- Compton dokázal, že elektron se chová přesně tak, jakoby do něj narazila hmotná částice - foton.
- Simulace

Comptonův jev

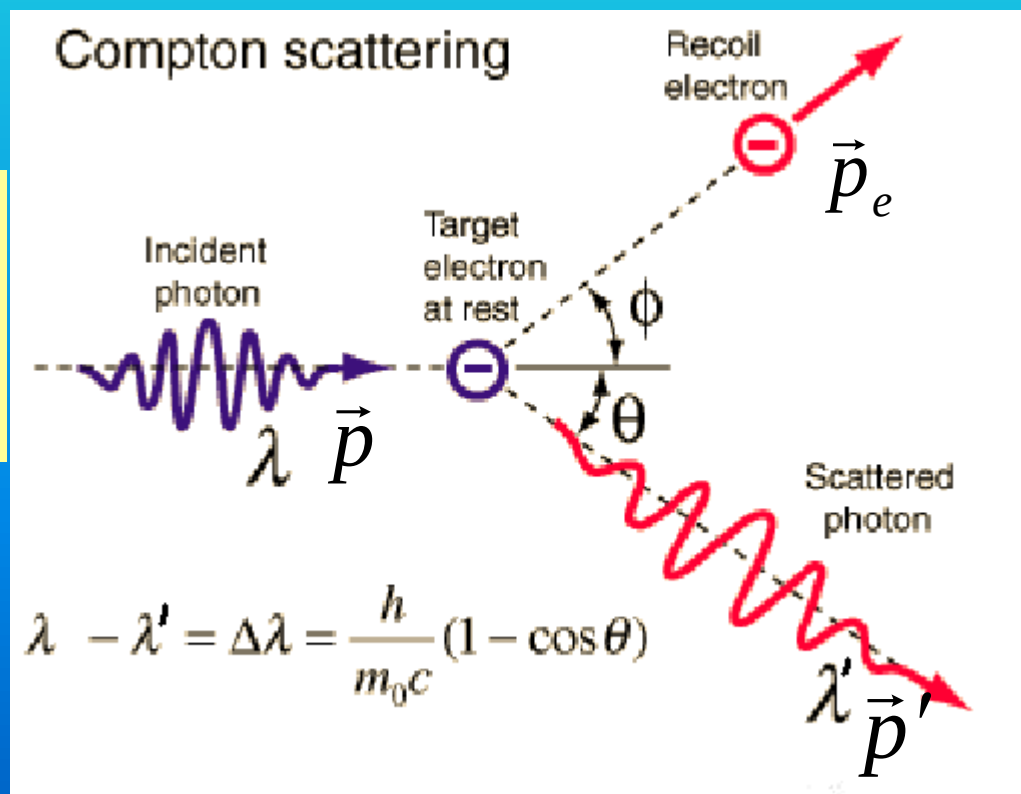
- Srážky fotonu s elektronem jsou dokonale pružné, tj. platí zákona zachování energie (1) a hybnosti (2).

(1)

$$hf = hf' + \frac{1}{2} m_e v^2$$

(2)

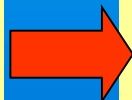
$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$$



Dualismus vlna částice

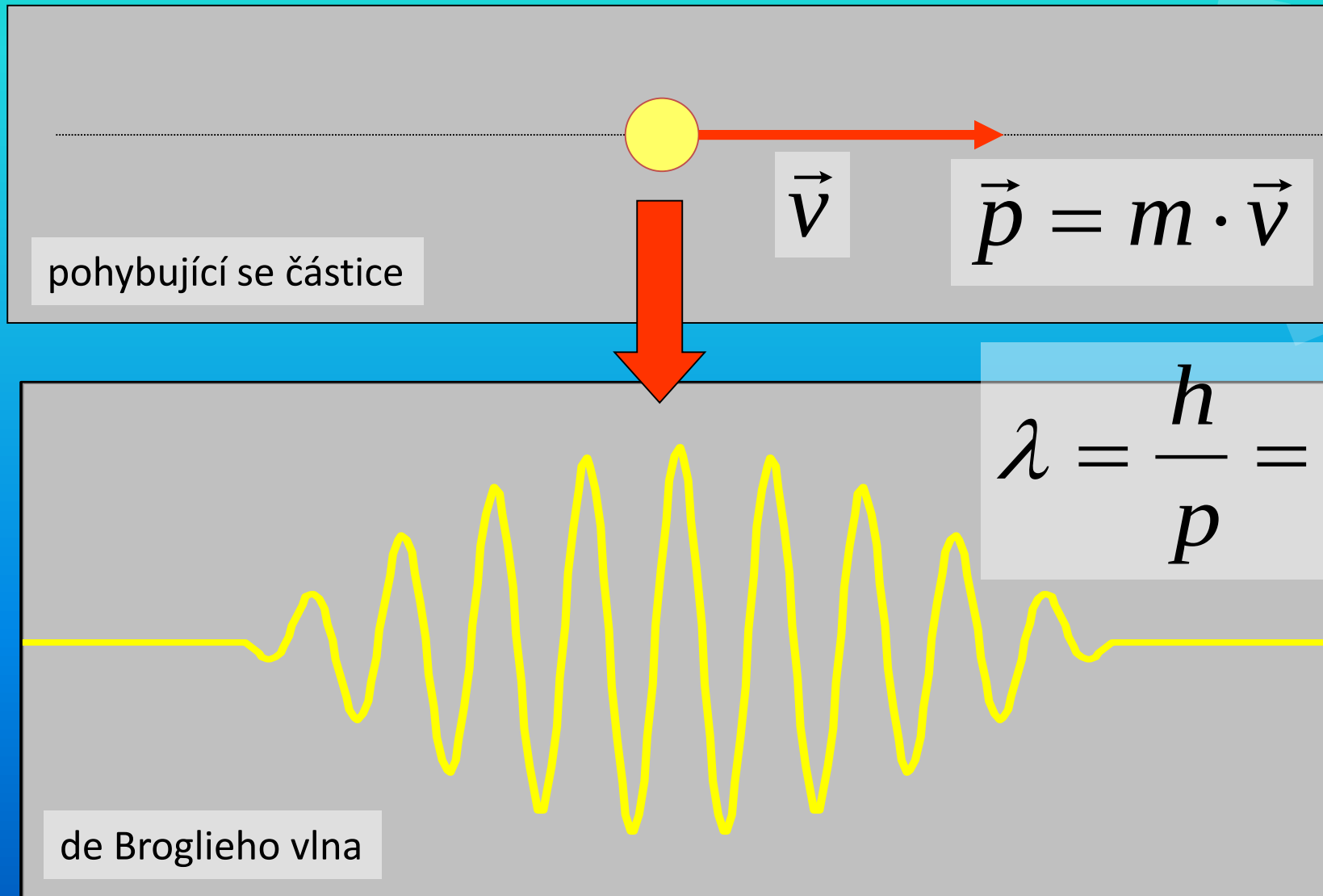
- Roku 1924 přišel francouzský fyzik Luis de Broglie s odvážnou hypotézou:
- Jestliže se vlnění chová jako proud částic, tak by se proud částic měl chovat jako vlnění o vlnové délce, kterou odvodíme ze vztahu pro hybnost fotonu:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$



$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Vlna a částice



Příklad

- Automobilům pohybujícím se po dálnici bychom tedy mohli přisoudit vlnění o vlnové délce:

$$m = 1000 \text{ kg}$$

$$v = 30 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1000 \cdot 30} = 2,21 \cdot 10^{-38} \text{ m}$$

- To je však tak extrémně krátkovlnné, že je nelze prokázat.

Vlny a částice v mikrosvětě

- Jiná situace nastane, když místo makroskopického tělesa budeme uvažovat částici mikrosvěta, např. elektron.
- U vlnění o těchto vlnových délkách bychom již mohli pozorovat jevy typicky vlnové povahy – ohyb a interferenci.
- A roku 1927 byly vlnové vlastnosti elektronu opravdu prokázány (C. Davisson, L. Germer, G. Thompson).
- Simulace

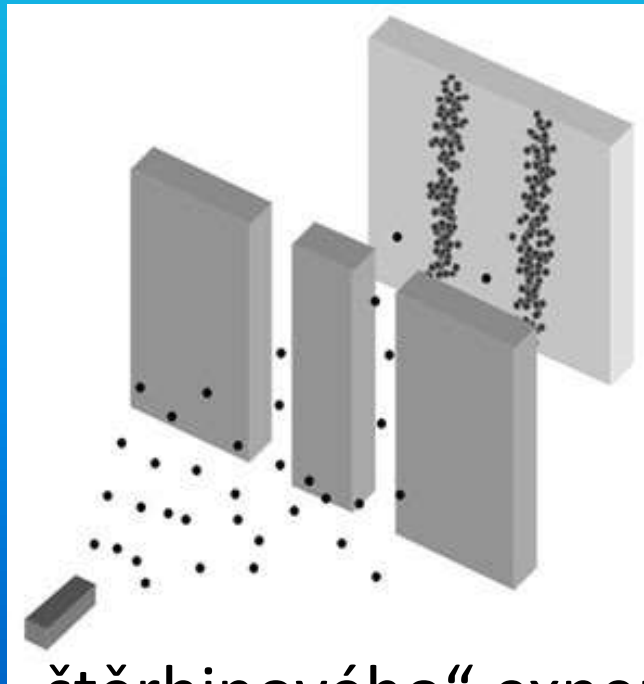
$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$v = 1000 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3} = 730 \text{ nm}$$

Dvouštěrbinový experiment

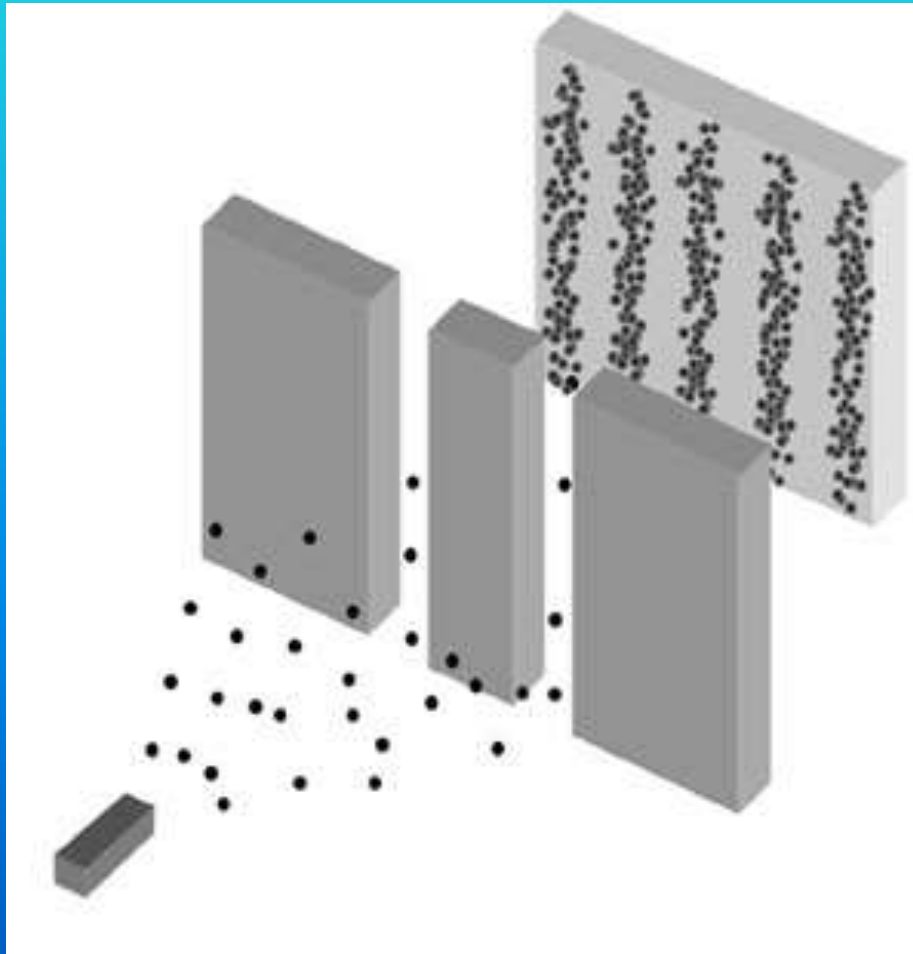
- Nejpřesvědčivější důkaz správnosti de Broglieho hypotézy získal roku 1961 C. Jönsson, když nechal elektrony procházet dvěma štěrbinami.
- Protože elektrony letí přímočaře, tak bychom očekávali, že se na stínítku za štěrbinami objeví pouze dvě stopy.



očekávaný výsledek „štěrbinového“ experimentu

Dvouštěrbinový experiment

- Když však byl experiment proveden, objevil se na stínítku interferenční obrazec typický pro vlnění.
skutečný výsledek „štěrbinového“ experimentu



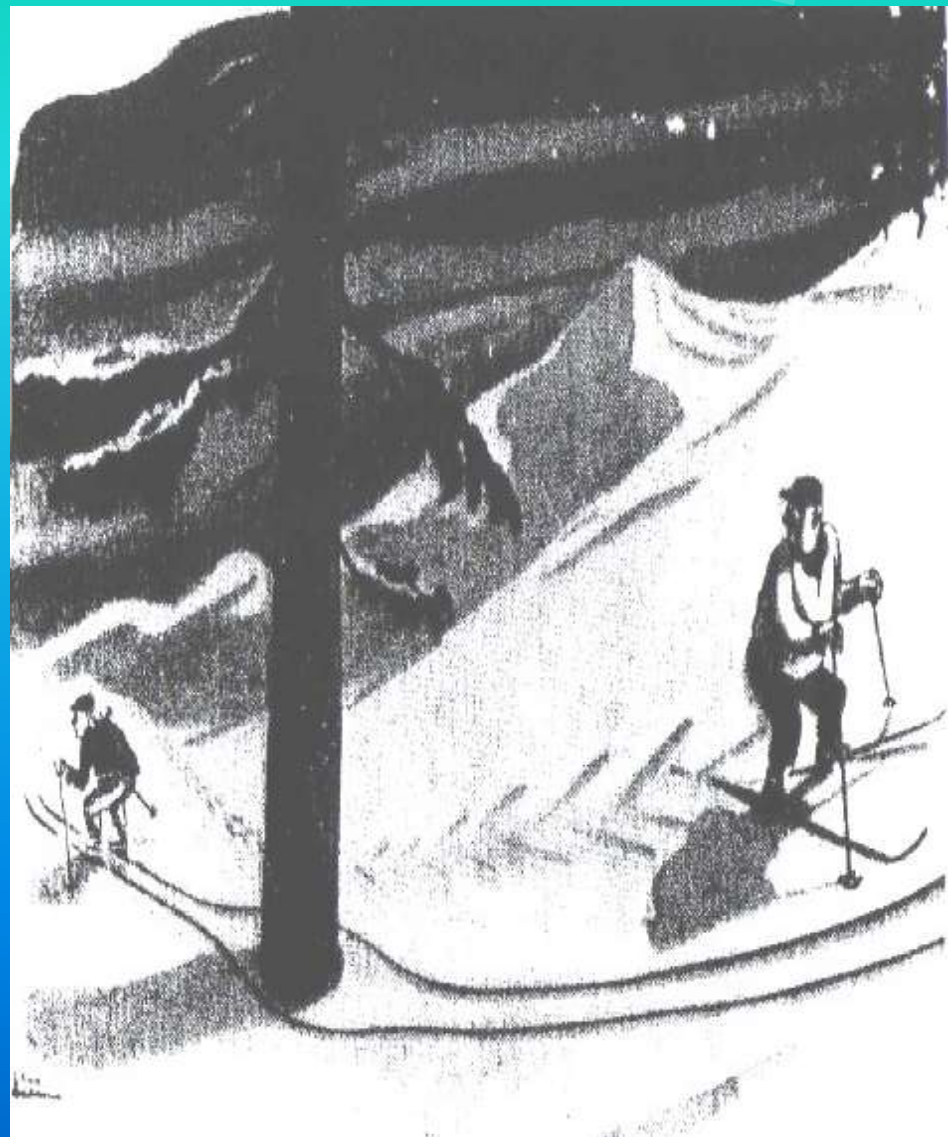
Dvouštěrbinový experiment

- Klasická fyzika pak nedokáže vysvětlit, jaká síla donutí elektrony ve štěrbině změnit směr jejich pohybu, ani to, jak je možné, že elektrony se mohou interferencí vyrušit.
- Ale elektron je částice mikrosvěta a neřídí se klasickou, ale kvantovou fyzikou.
- Avšak ani kvantová fyzika tento jev nevysvětluje a pouze konstatuje, že vlnění se někdy chová jako proud částic a proud částic jako vlnění (**korpuskulárně vlnový dualismus**).

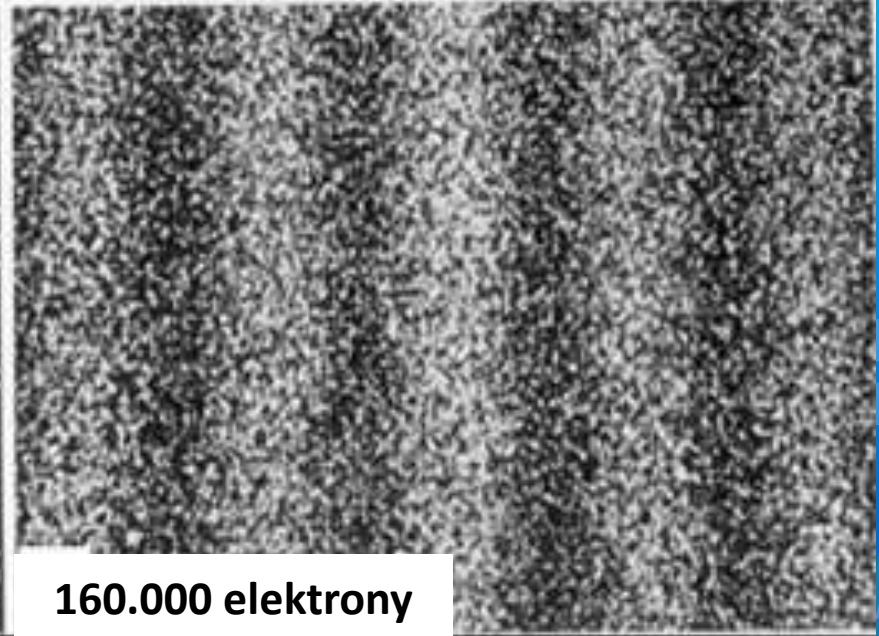
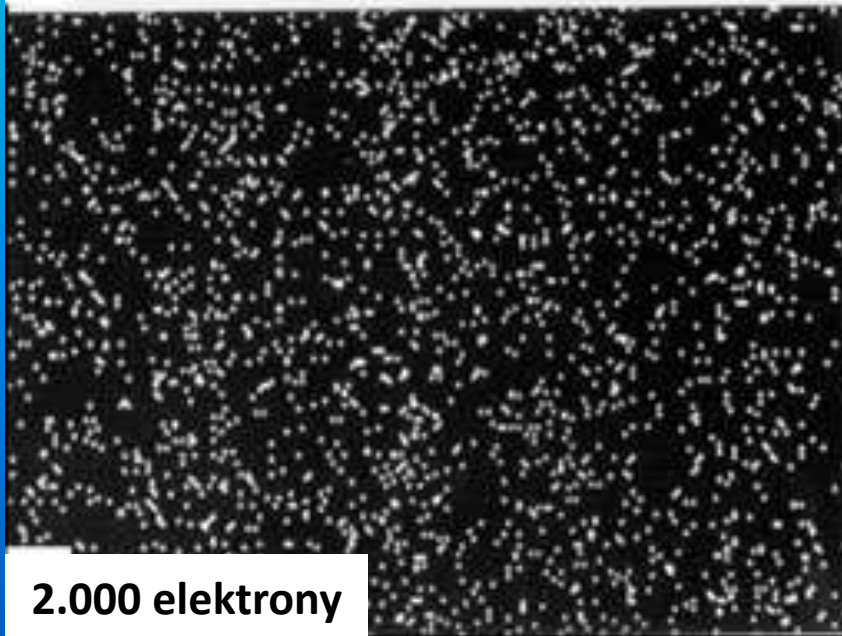
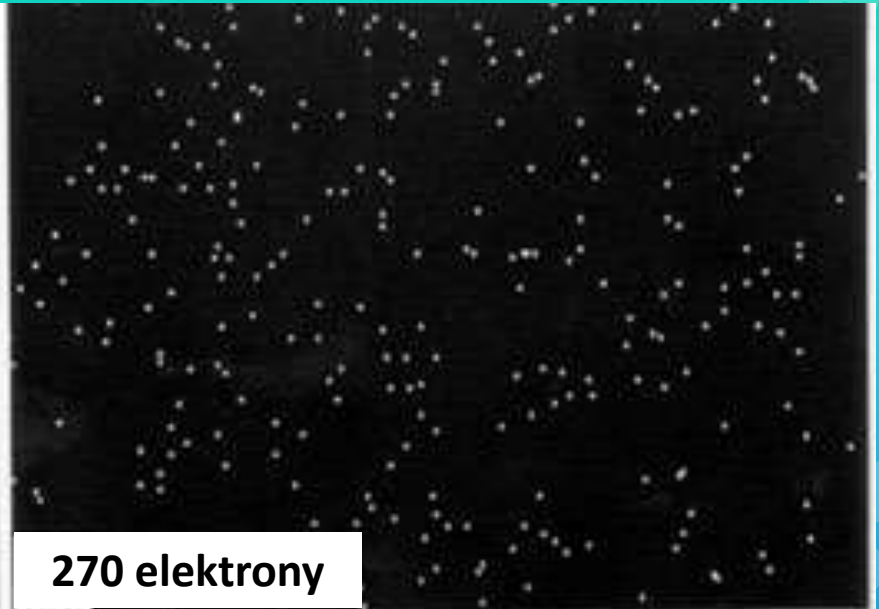
Dvouštěrbinový experiment



- Ještě podivnější však bylo, že interferenční obrazec se objevil i tehdy, když byly elektrony vysílány jeden po druhém.
- Jakoby se elektron rozdělil na dvě části, ty prošly štěrbinami, pak se na stínítku opět spojily a vzájemně vyrušily.



Interferenční obrazec vytvořený:



Dualismus vlna částice

- Když však chceme pomocí detektoru zjistit, kterou štěrbinou elektron vlastně prošel, tak interferenční obrazec prostě zmizí a elektrony se začnou chovat jako proud klasických částic.

Heisenbergovy relace neurčitosti

- Německý fyzik W. Heisenberg zjistil, že některé veličiny nelze v mikrosvětě určit současně, a to s neomezenou přesností.
- Chceme-li změřit polohu např. elektronu, tak si na něj musíme „posvítit“ fotonem, který mu však předá část své hybnosti.
- Chceme-li určit jeho polohu přesněji, musíme použít foton o kratší vlnové délce (tj. s větší energií), který však více změní jeho hybnost.



První Heisenbergova relace neurčitosti:

- Čím přesněji určíme polohu elektronu, tím méně přesně určíme jeho hybnost, resp. rychlost, a opačně.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

neurčitost polohy

neurčitost hybnosti

Příklad

- Aplikujme nyní tuto relaci neurčitosti na makroskopické těleso:

$$m \approx 10 \text{ kg}$$

$$v \approx 1 \text{ ms}^{-1}$$

$$\Delta p \approx 10 \text{ kgms}^{-1}$$

$$\Delta x = ?$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \frac{\hbar}{2\pi}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx 10^{-34}$$

$$\Delta x \approx \frac{10^{-34}}{10} = 10^{-35}$$

- Závěr:
 - Polohu makroskopického tělesa můžeme určit téměř absolutně přesně.

Příklad

- A nyní pro elektron v atomu vodíku:

$$m \approx 10^{-30} \text{ kg}$$

$$v \approx 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

$$\Delta p \approx 10^{-24} \text{ kgms}^{-1}$$

$$\Delta x = ?$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx 10^{-34}$$

$$\Delta x \approx \frac{10^{-34}}{10^{-24}} = 10^{-10}$$

- Neurčitost polohy elektronu ($\Delta x = 10^{-10} \text{ m}$) je řádově rovná průměru celého atomu.
- Závěr:
 - Nemá smysl pokoušet se určit polohu elektronu v atomu.

Druhá Heisenbergova relace neurčitosti:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

neurčitost energie

neurčitost času

- Důsledek:
 - Zákon zachování energie neplatí v kvantové fyzice absolutně přesně, ale s přesností nejvýše...

časový interval mezi dvěma měřeními energie

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2 \Delta t}$$

Schrödingerova rovnice

- Z první Heisenbergovy relace neurčitosti vyplývá, že nikdy nezjistíme přesnou polohu částice mikrosvěta.
- Něco však spočítat umíme...
- Rakouský fyzik E.Schrödinger totiž intuitivně sestavil rovnici, která popisuje jakýkoliv systém mikrosvěta.

Schrödingerova rovnice

- Jedná se o rovnici diferenciální, jejímž řešením není číslo, ale tzv. vlnová funkce $\psi = \psi(x, y, z)$.

ψ ... psí

celková energie

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi = E\psi$$

druhé derivace ψ

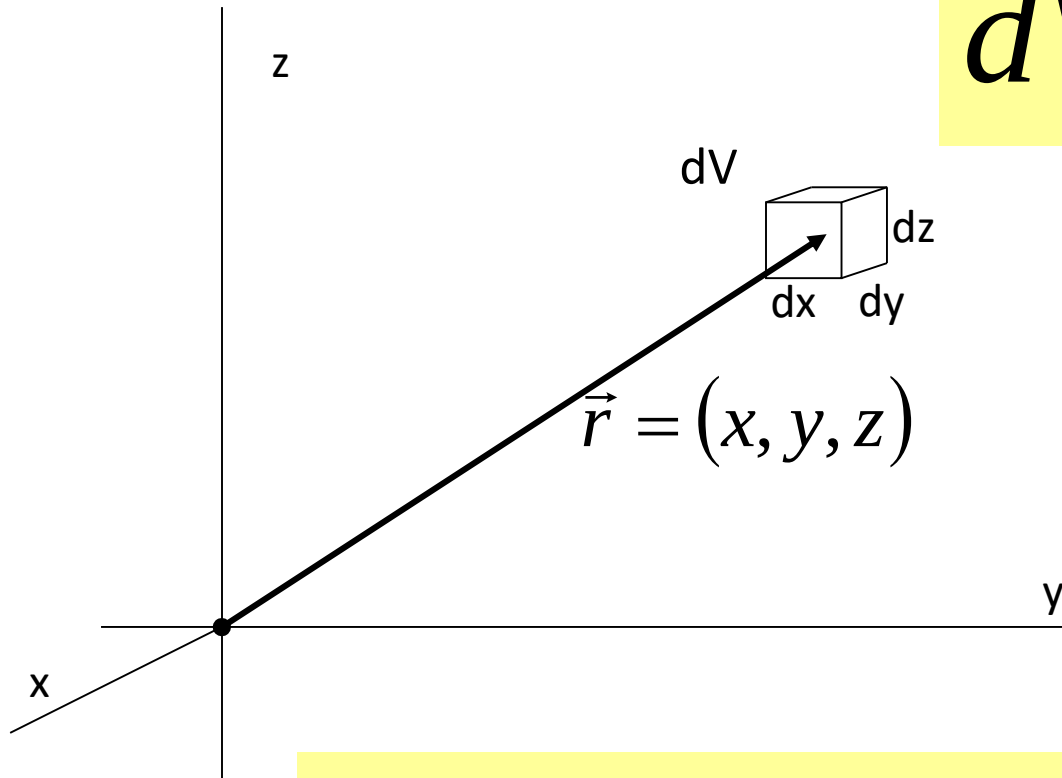
potenciální energie
 $V = V(x, y, z)$

Význam vlnové funkce

- Německý fyzik Max Born pak ukázal, že ψ žádný fyzikální význam nemá, ale druhá mocnina její absolutní hodnoty umožňuje vypočítat pravděpodobnost výskytu částice v daném místě prostoru (p).

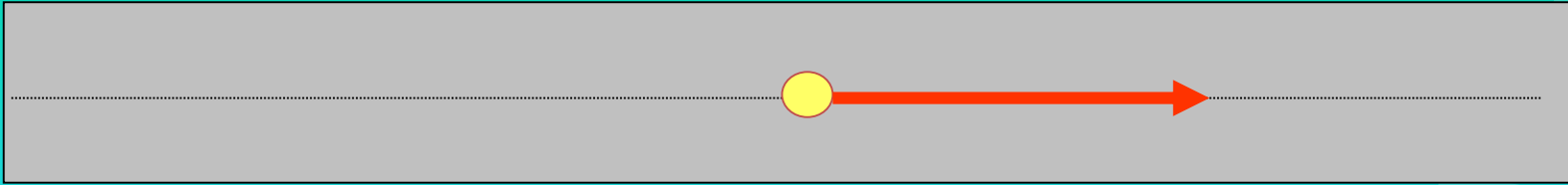
$$p = |\Psi(x, y, z)|^2 dV$$

$$dV = dx dy dz$$

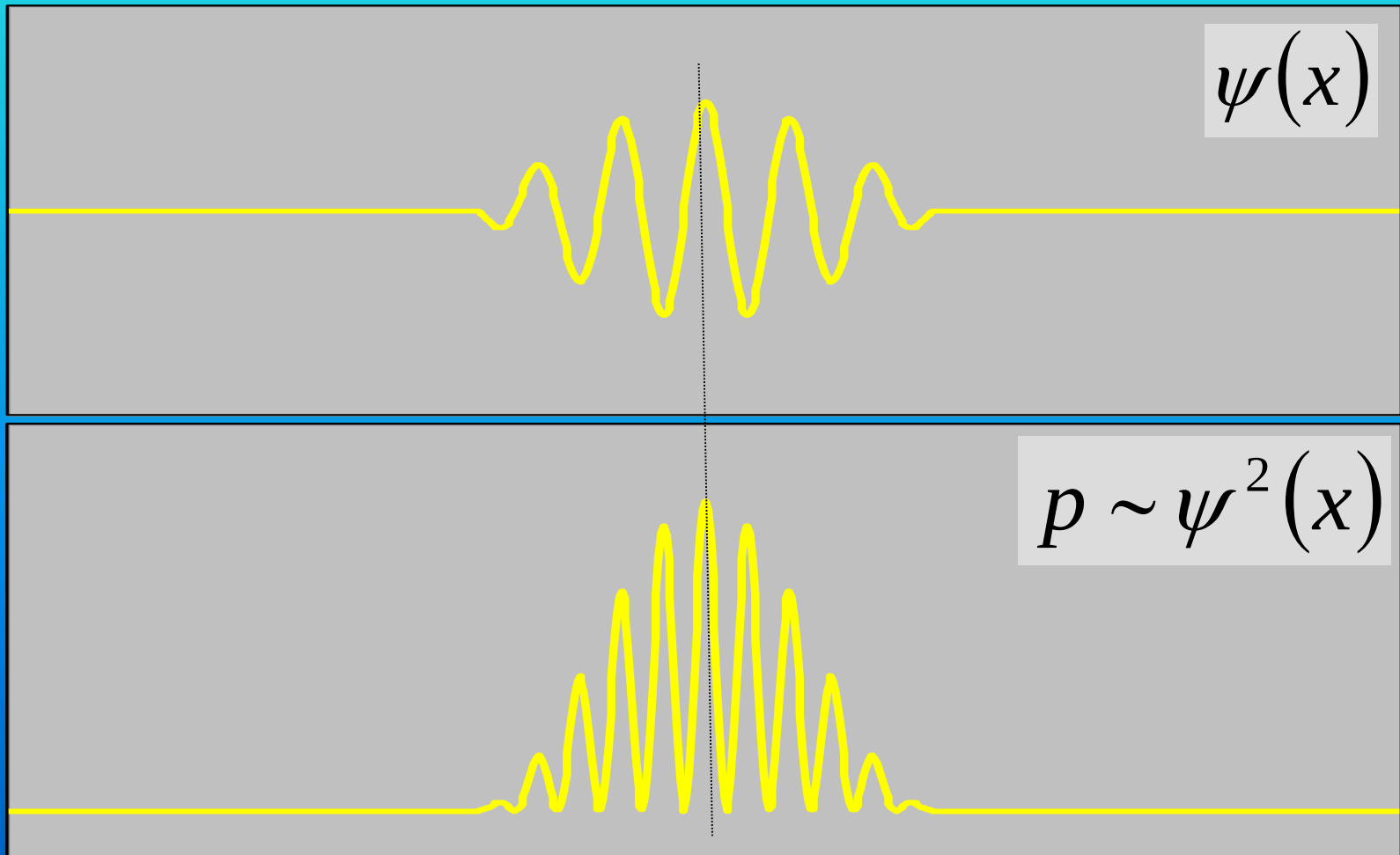


$$p = |\Psi(x, y, z)|^2 dx dy dz$$

V klasické fyzice můžeme určit přesnou polohu částice.



V kvantové fyzice pak pouze pravděpodobnost výskytu částice.



Důsledky Schrödingerovy rovnice

- Aby však Schrödingerova rovnice (SR) měla v jistých případech řešení, nemůže energie částice E nabývat všech hodnot, ale jenom hodnot jistých, předem daných.
- Říkáme, že energie může být kvantována.
- SR pak můžeme sestavit a exaktně řešit pouze v některých jednoduchých případech.

Příklad SR

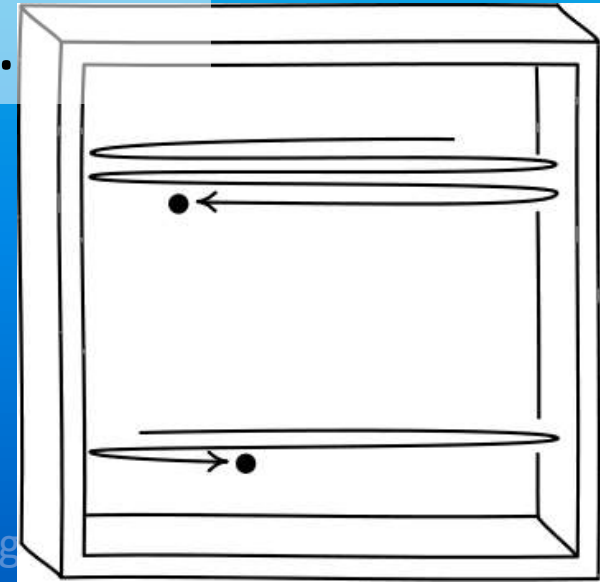
- Částice v jednorozměrné „krabici“ s absolutně tuhými stěnami
 - Na základě řešení SR se nechá se dokázat, že energie částice je kvantována:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

kvantové číslo

$n = 1, 2, 3, \dots$

šířka krabice



Kvantování energie

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \neq 0$$

$$E_n = n^2 E_1$$

$$n = 1 \Rightarrow E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

základní stav

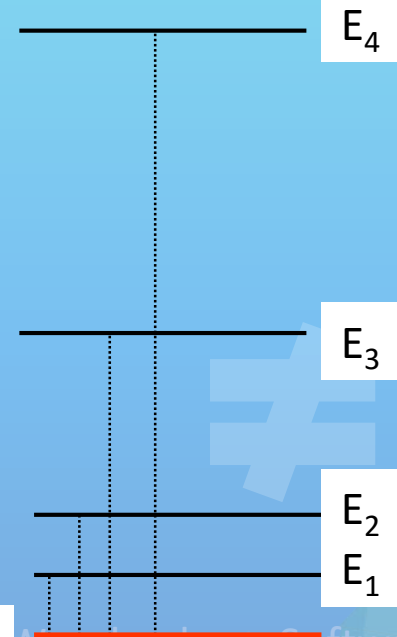
$$n = 2 \Rightarrow E_2 = \frac{4h^2}{8mL^2} = 4E_1$$

$$n = 3 \Rightarrow E_3 = \frac{9h^2}{8mL^2} = 9E_1$$



...atd.

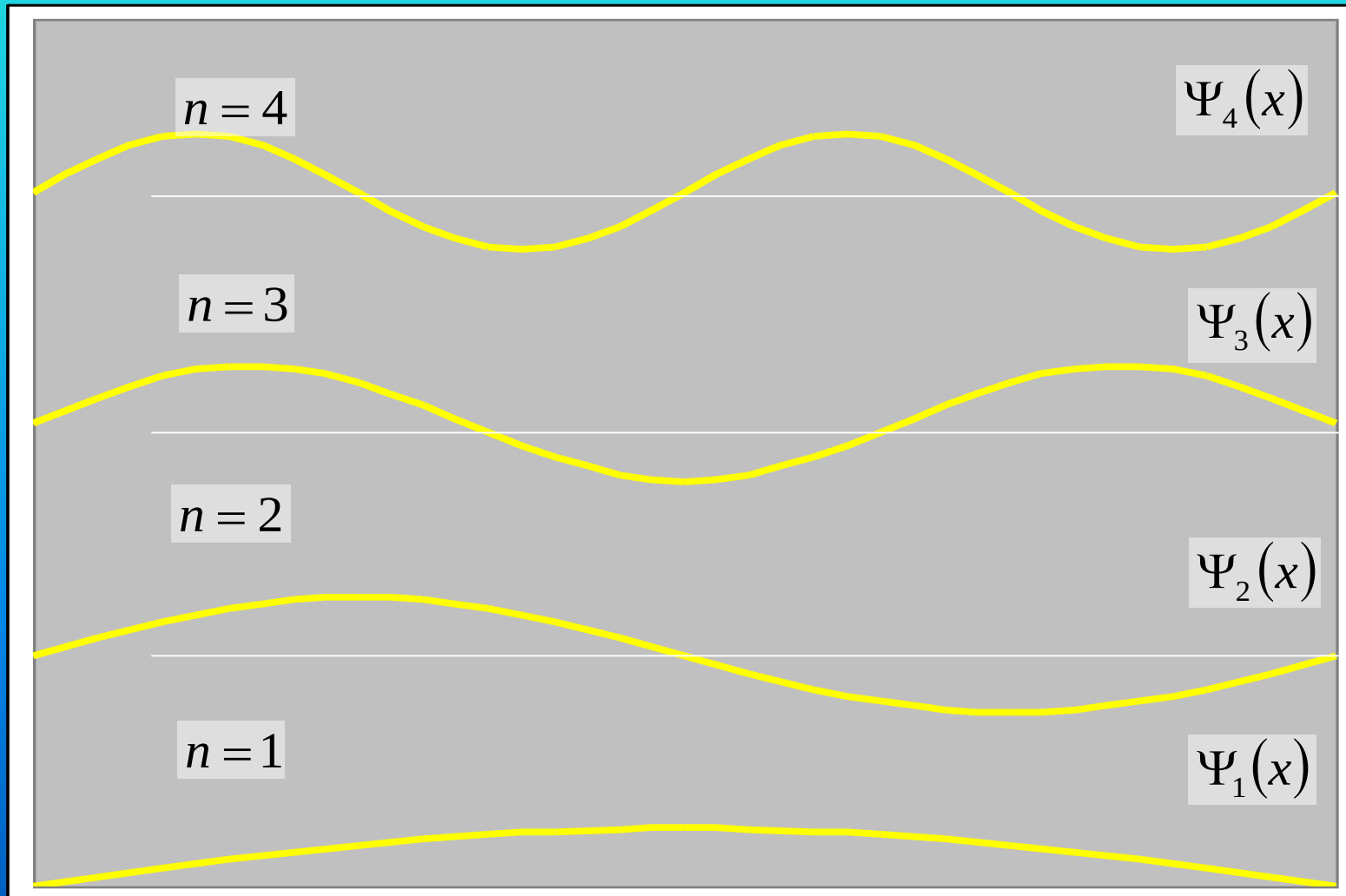
excitované stavy



Kvantování energie

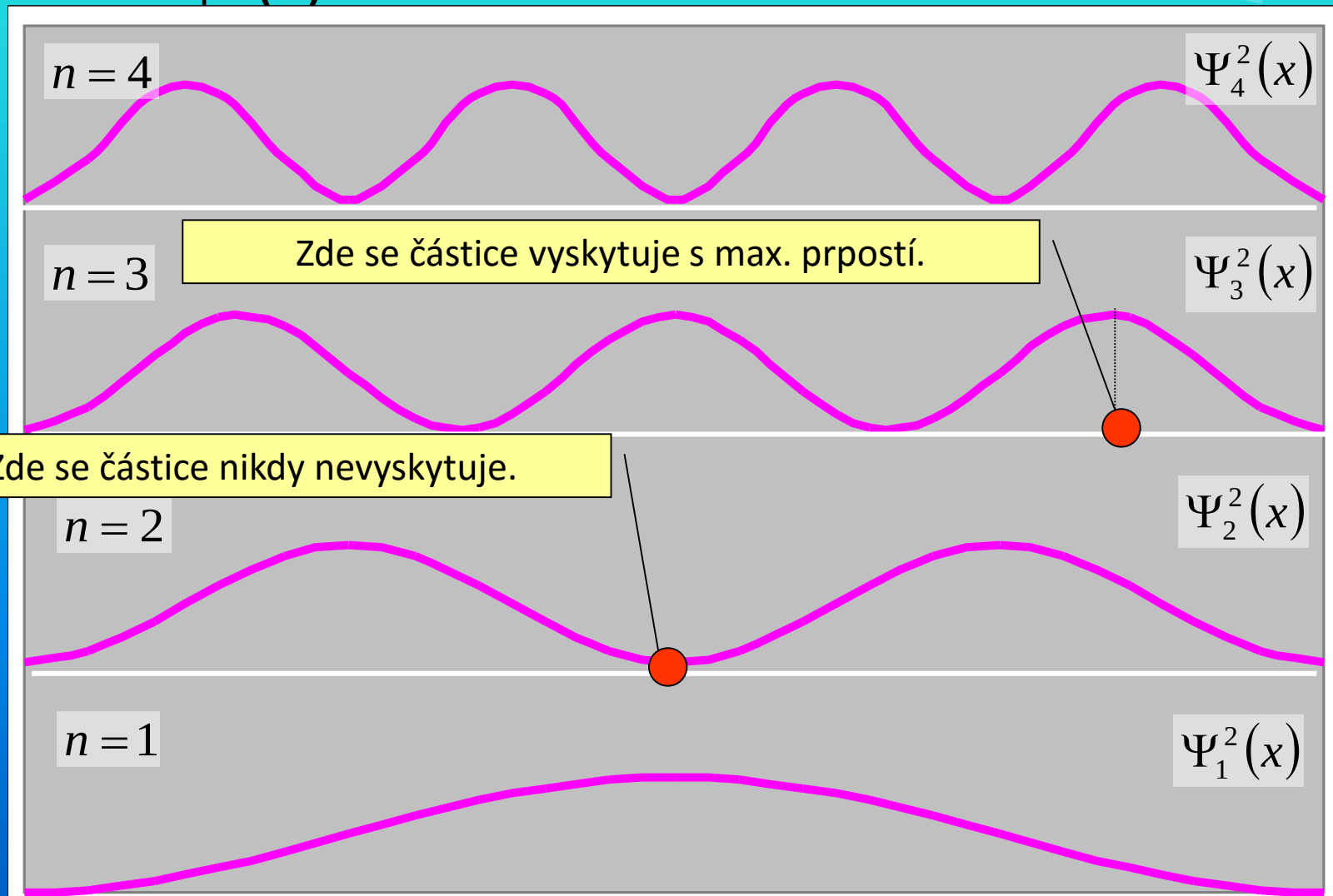
$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Každému n pak odpovídá jedna vlnová fce ψ :



Kvantování energie

- Pravděpodobnost výskytu částice je pak úměrná $\psi^2(x)$:



Pravděpodobnost výskytu pak můžeme znázornit i takto:

$n = 4$

$\Psi_4^2(x)$

$n = 3$

$\Psi_3^2(x)$

$n = 2$

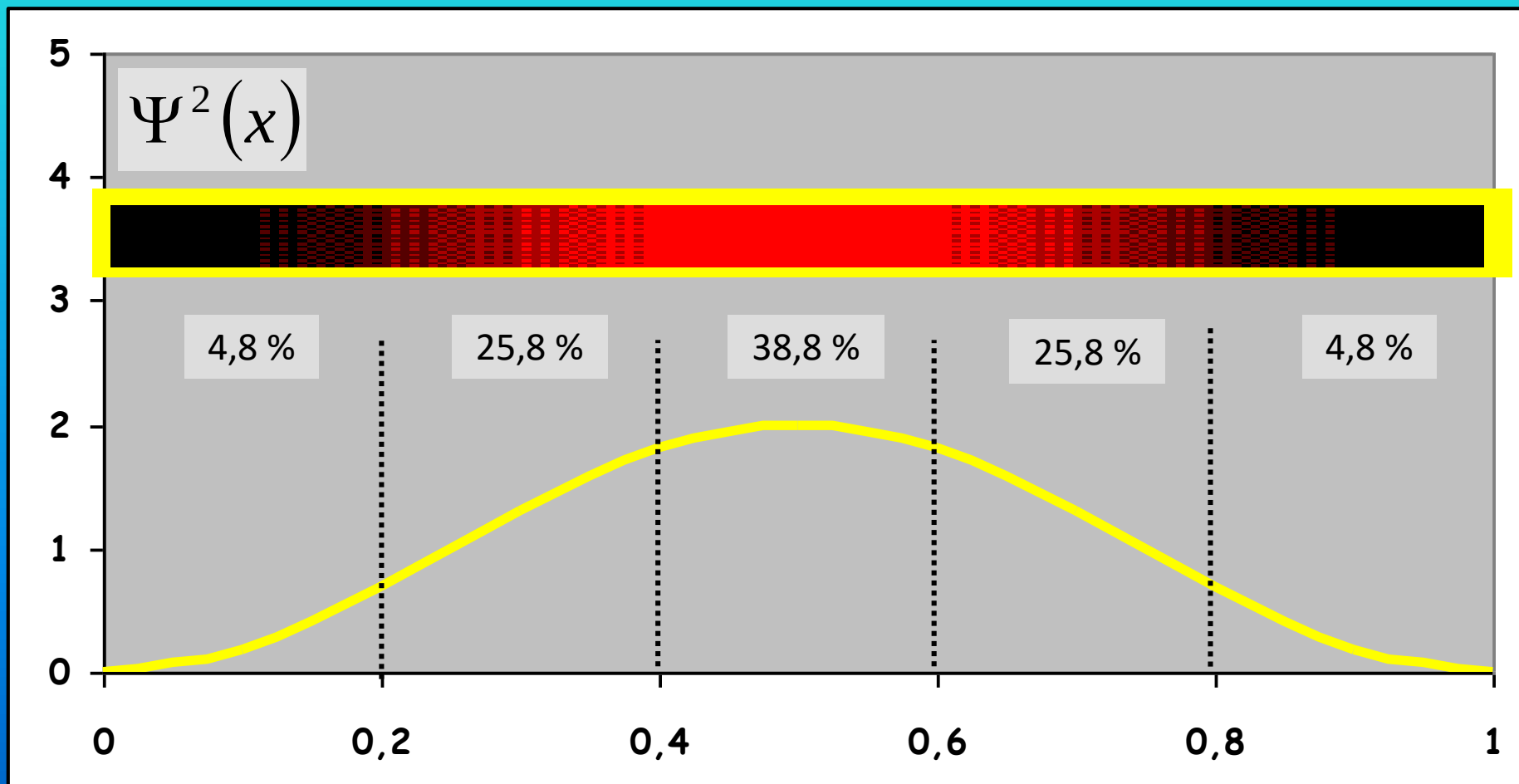
$\Psi_2^2(x)$

$n = 1$

$\Psi_1^2(x)$

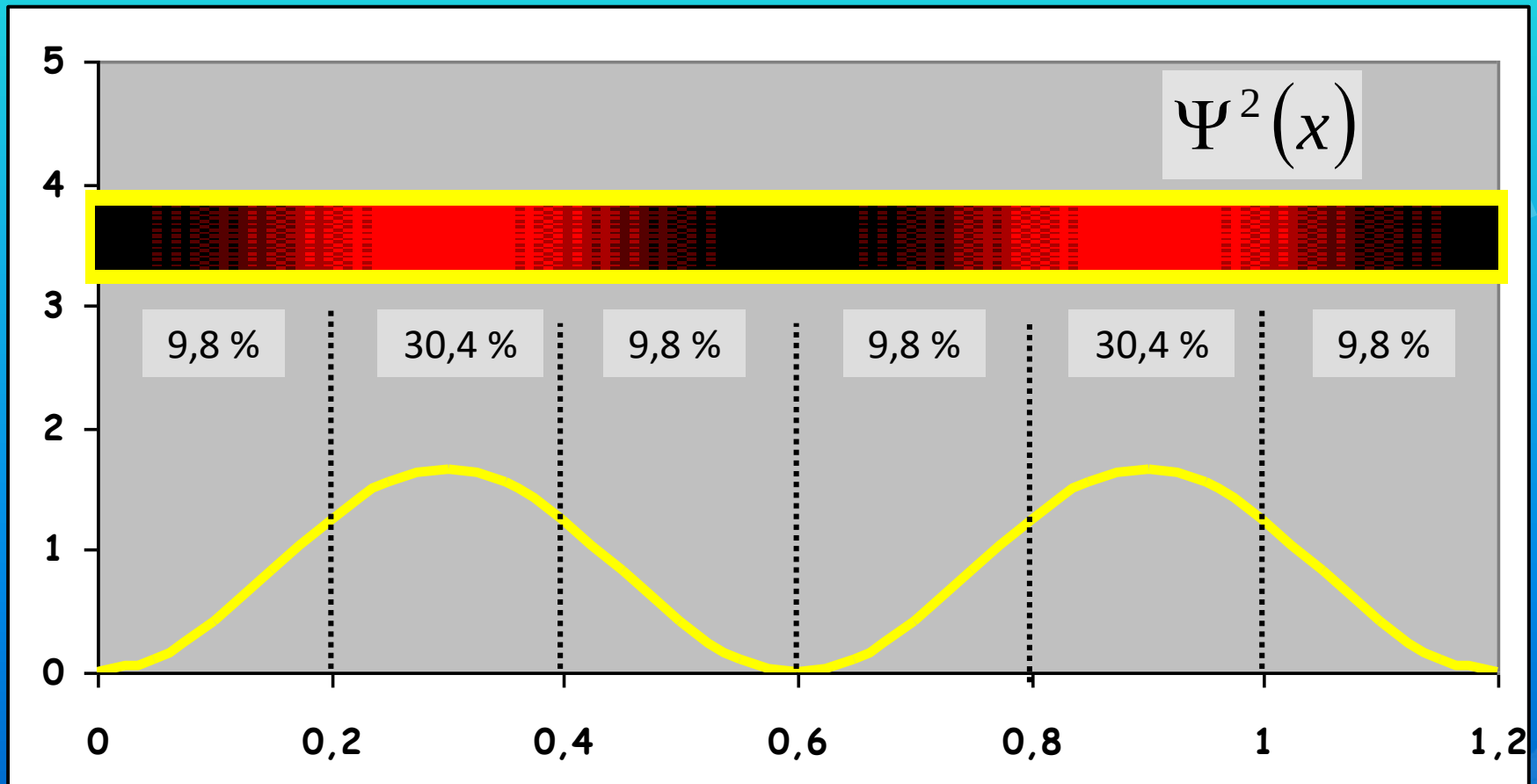
Pravděpodobnost výskytu částice v „krabici“ pro $n = 1$

- Simulace

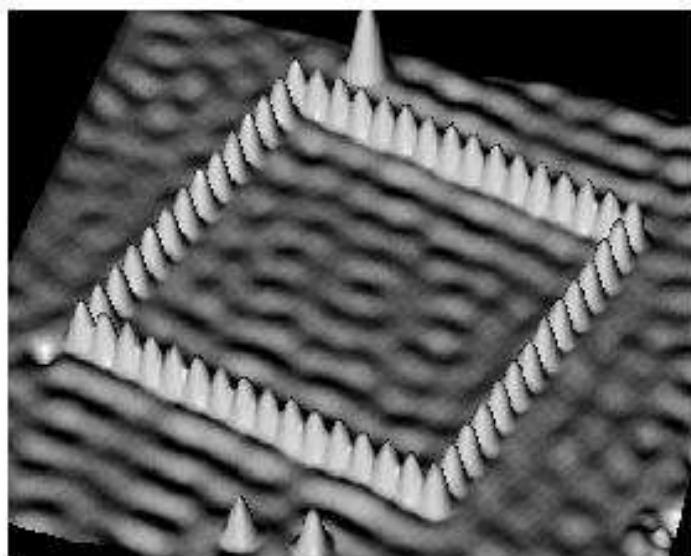
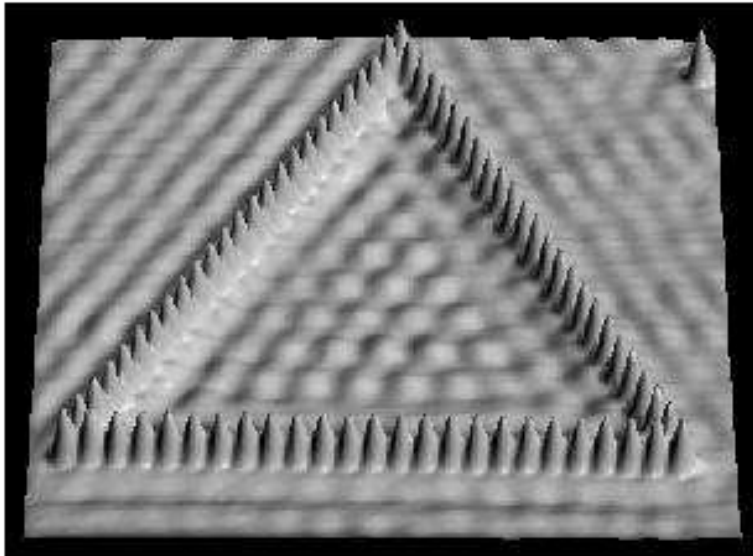
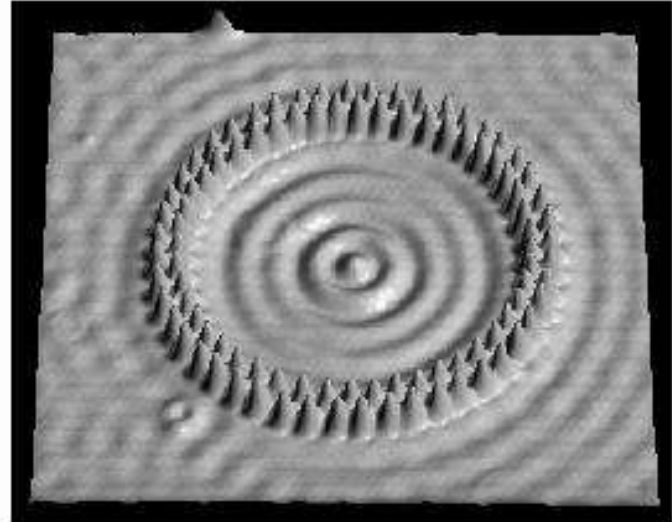
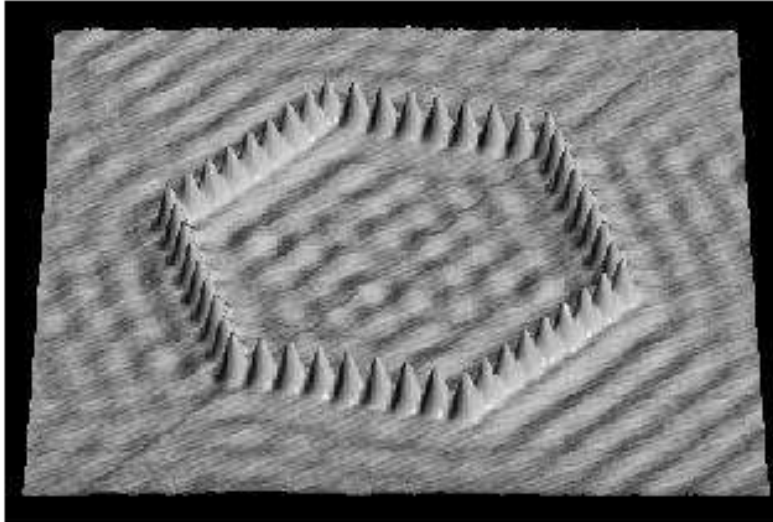


Pravděpodobnost výskytu částice v „krabici“ pro $n = 2$

- Simulace

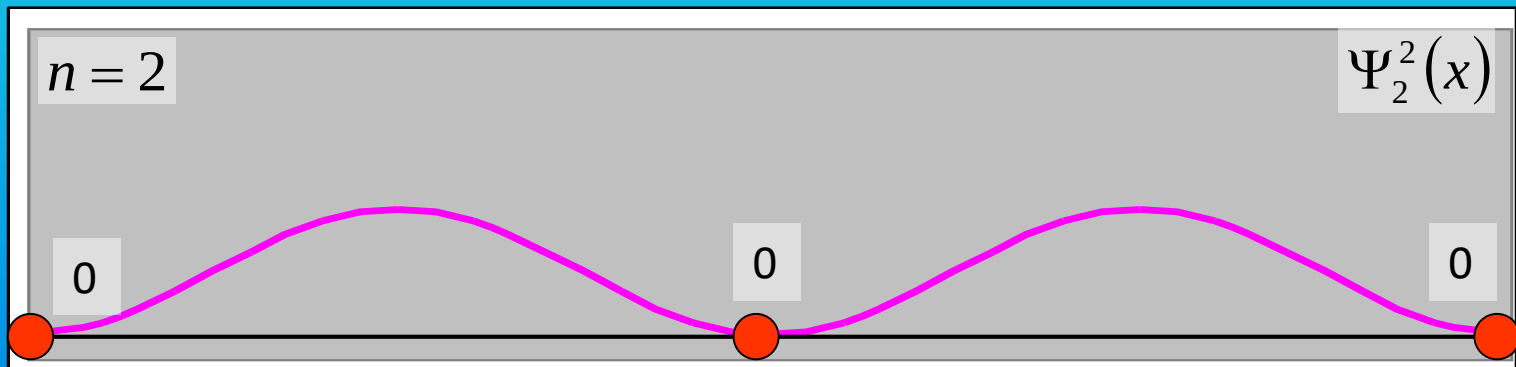


Experimentální ověření: elektrony v „ohradě“



Logické důsledky:

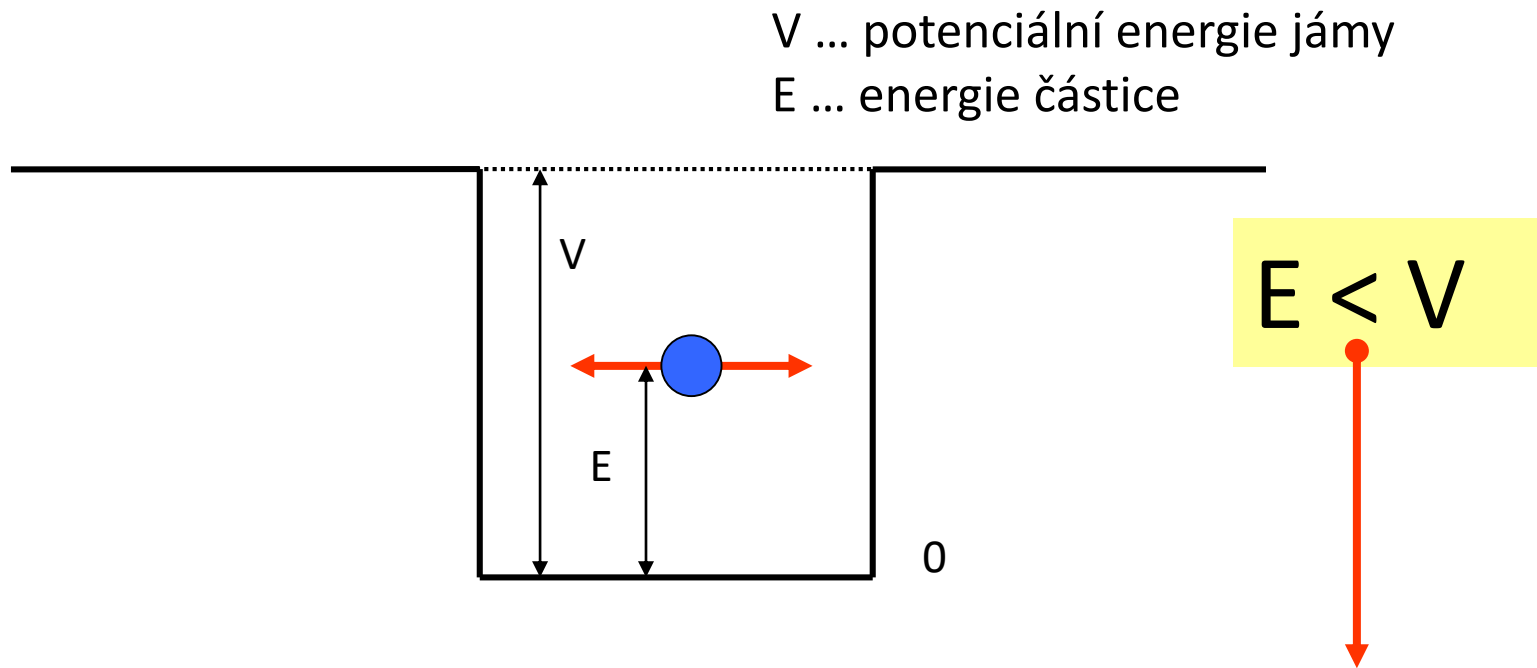
- Částice se odráží od stěn „krabice“, aniž na ně dopadá.
- Částice přechází z levé části „krabice“ do pravé, aniž projde jejím středem.



- Závěr jak podle Járy Cimrmana:
 - Sice se nikdy nedozvíme, kde částice je, ale na druhou stranu dokážeme s jistotou říci, kde není.

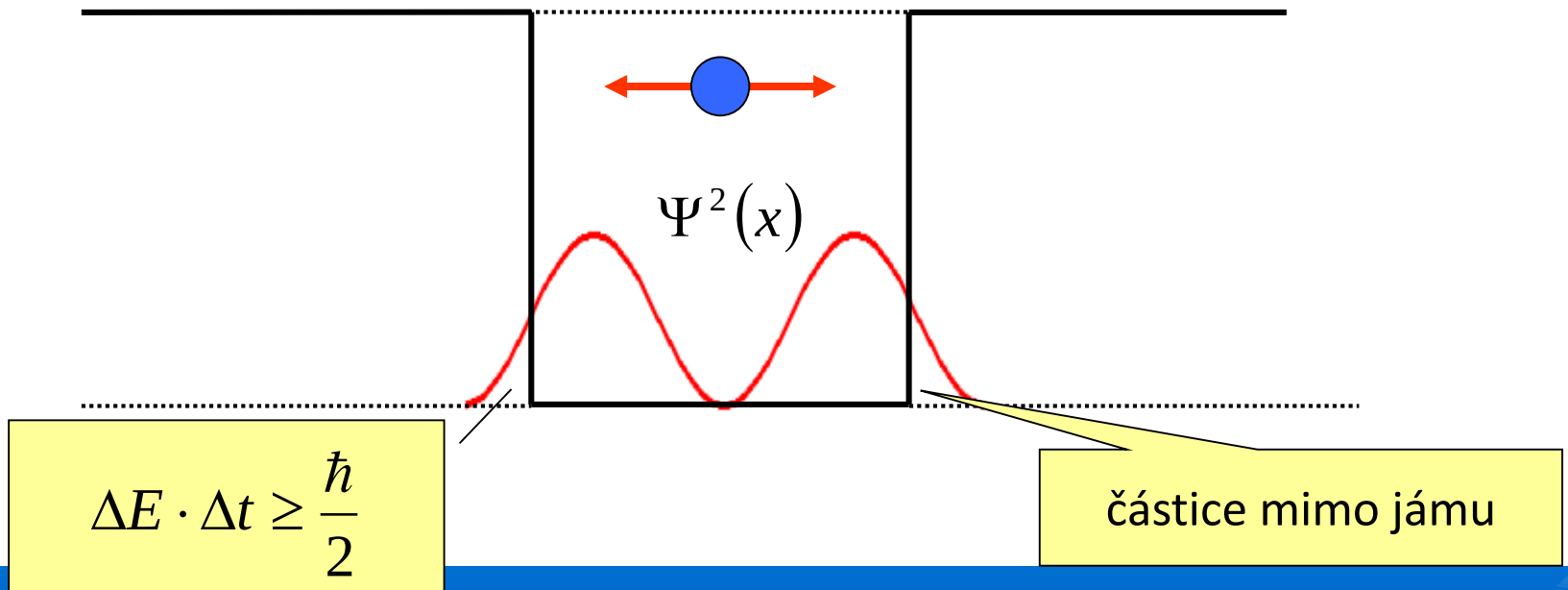
2 příklad – potenciálová jáma

- Podle klasické fyziky nemá částice šanci se z jámy dostat.



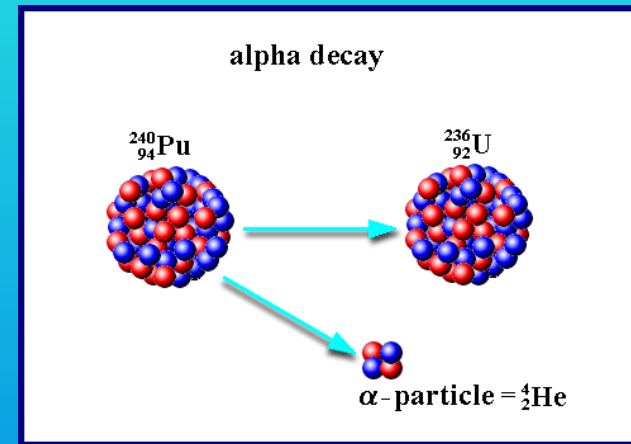
Tunelový jev

- Avšak řešením SR zjistíme, že částice může z jámy uniknout – protunelovat se.
- Simulace



Experimentální potvrzení:

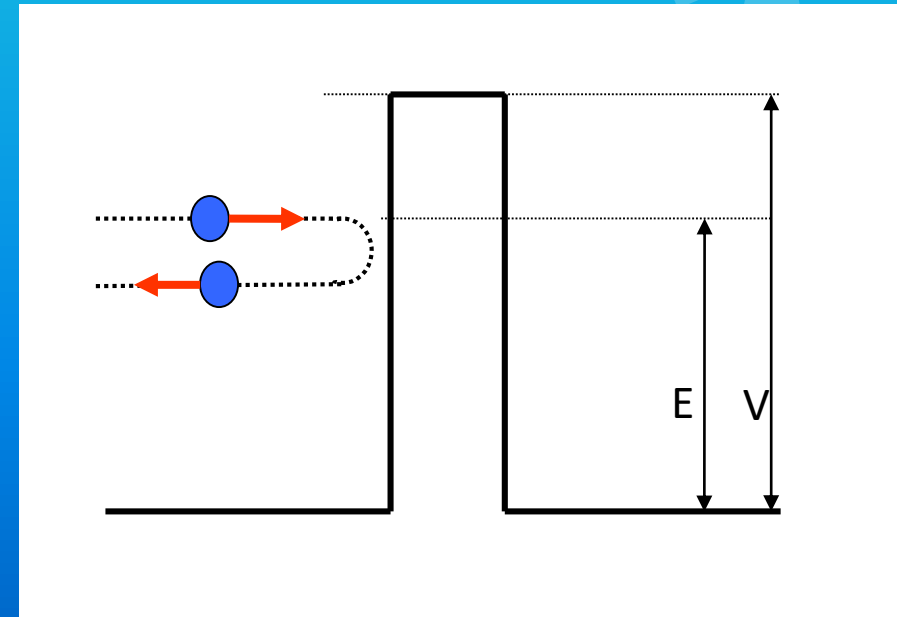
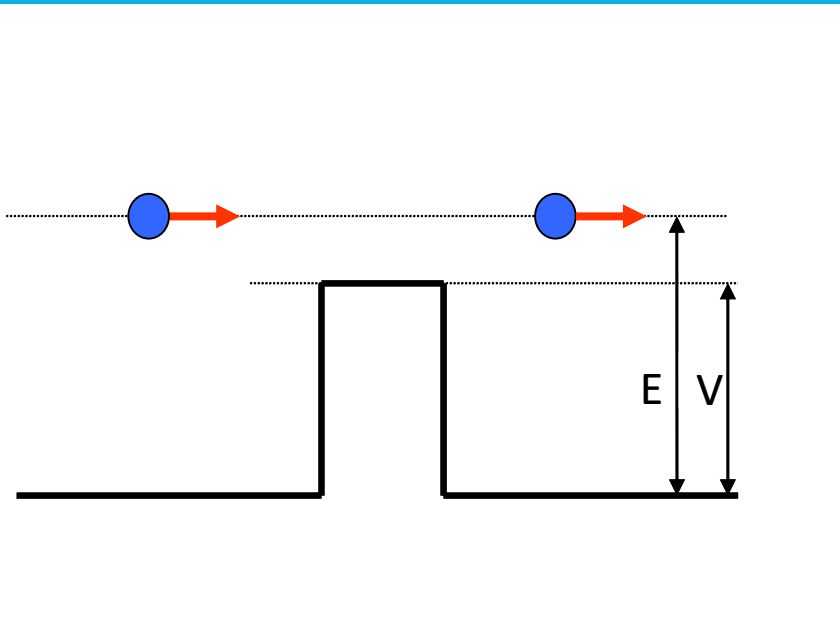
- Částice α (jádra helia) unikají (tunelují) z jader, aniž na to mají energii.



- Ani volné elektrony by ze stejného důvodu neměly při pokojové teplotě opouštět kov.
- Přesto se z něj při tzv. studené emisi uvolňují.

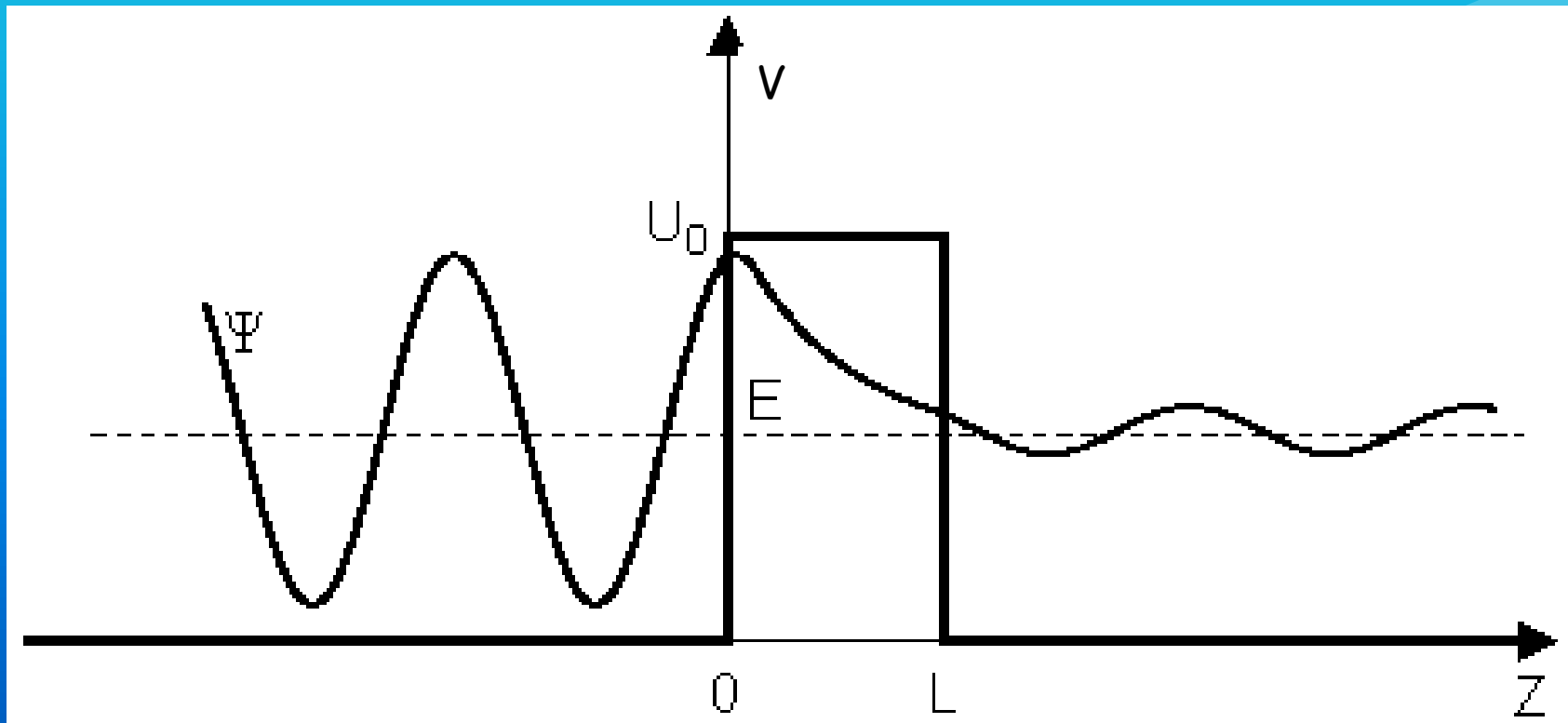
Částice nalétávající na potenciálový val

- Klasická fyzika tvrdí:
 - Pokud má částice energii větší než je potenciální energie valu, tak jím projde.
 - Pokud má však energii menší, tak se musí odrazit.

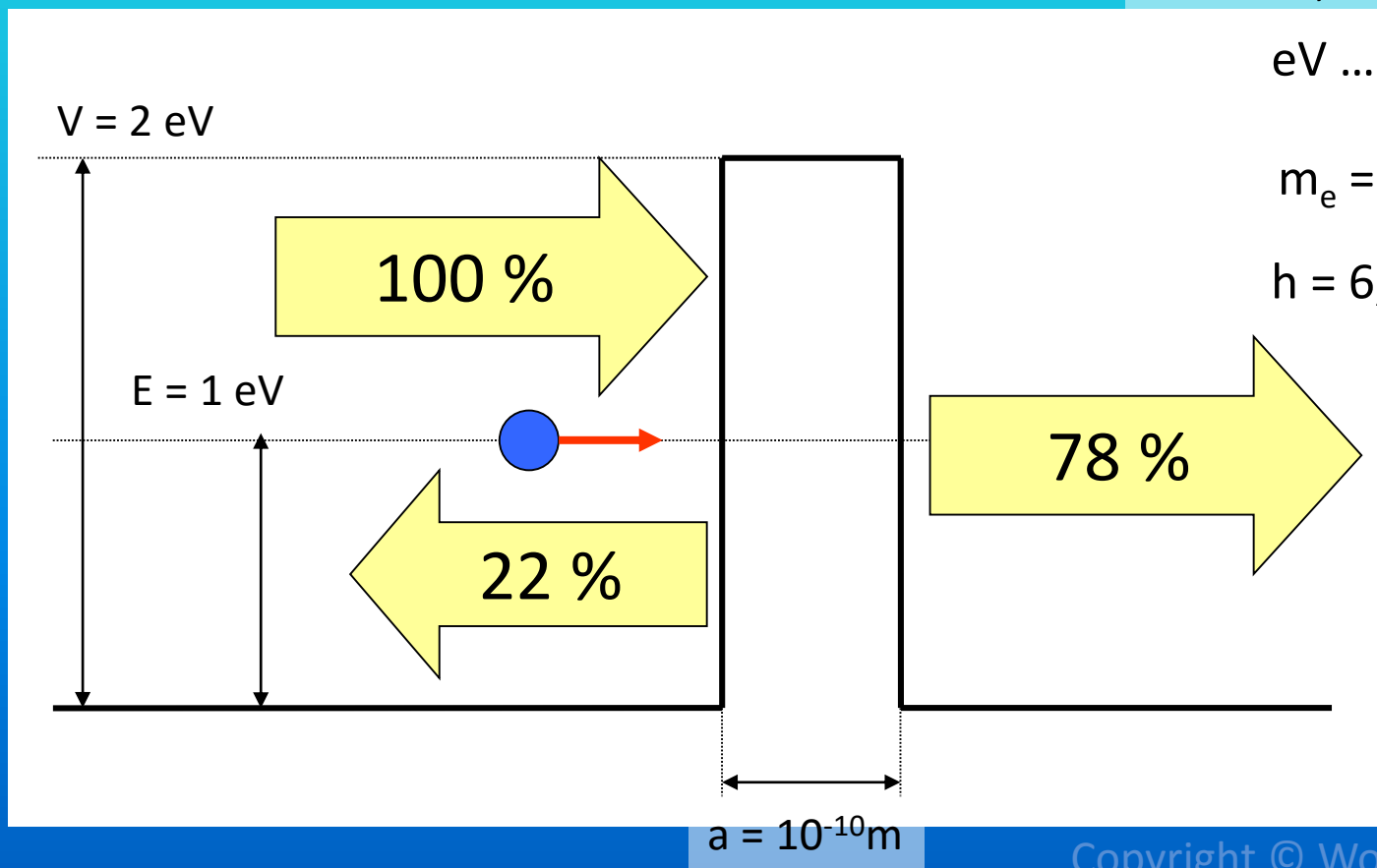


Částice nalétávající na potenciálový val

- Kvantová fyzika tvrdí:
 - Je-li energie částice menší než potenciální energie valu, nemusí se od něj jenom nutně odrazit, ale může se na druhou stranu „protunelovat“.



tunelování elektronu přes potenciálový val



$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

eV ... elektronvolt

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Vysvětlení

- Úvaha, že elektron nemá dostatek energie, a proto valem nepronikne, je chybná, protože hodnotu E nikdy nezjistíme přesně.
- Podle druhé Heisenbergovy relace neurčitosti je totiž neurčitost energie tohoto elektronu větší než 2eV , neboli o E nelze nic říci.

$$\Delta x = 10^{-10} \text{ m}, \quad E = 1 \text{ eV}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 5,9 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

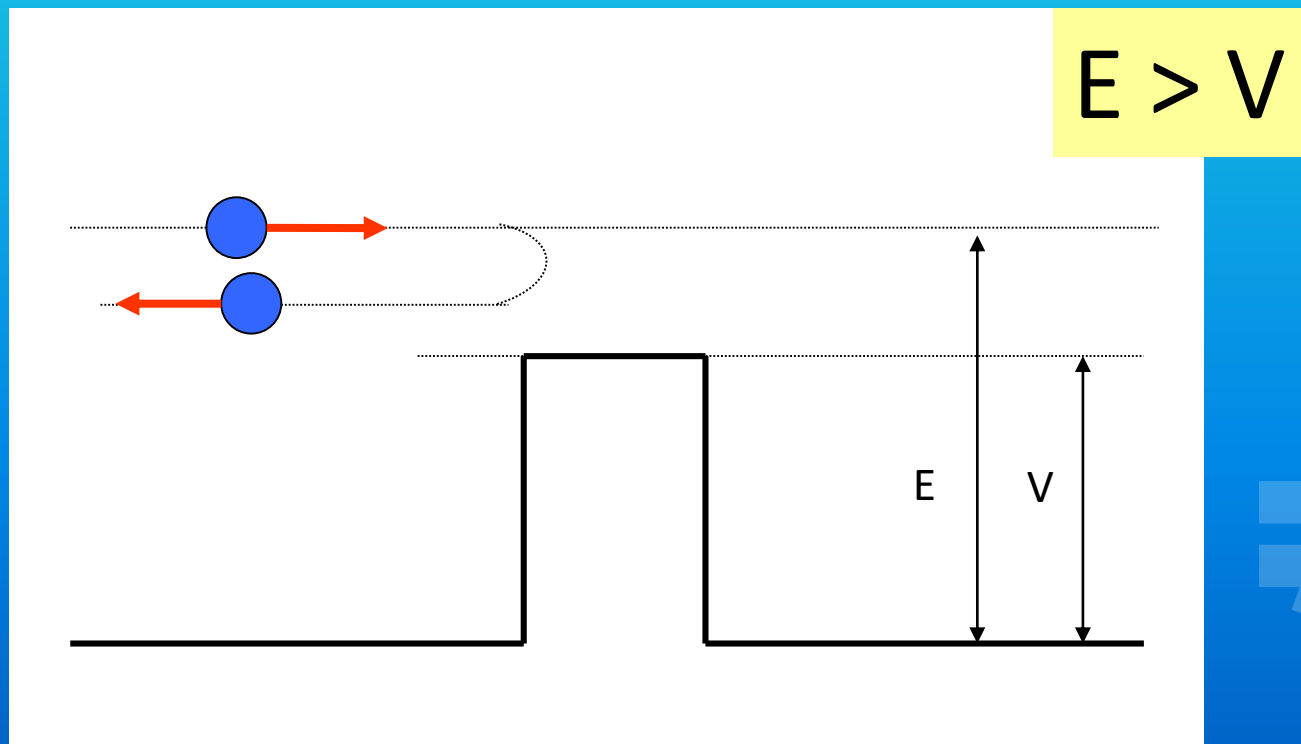
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{10^{-10}}{5,9 \cdot 10^5} = 1,69 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} = 5,28 \cdot 10^{-35} \text{ Js}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{5,28 \cdot 10^{-35}}{1,69 \cdot 10^{-16}} = 3,13 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,96 \text{ eV}$$

Nadbariérový odraz

- Na druhou stranu se částice může odrazit od valu, i když má dostatek energie, aby jím prošla.

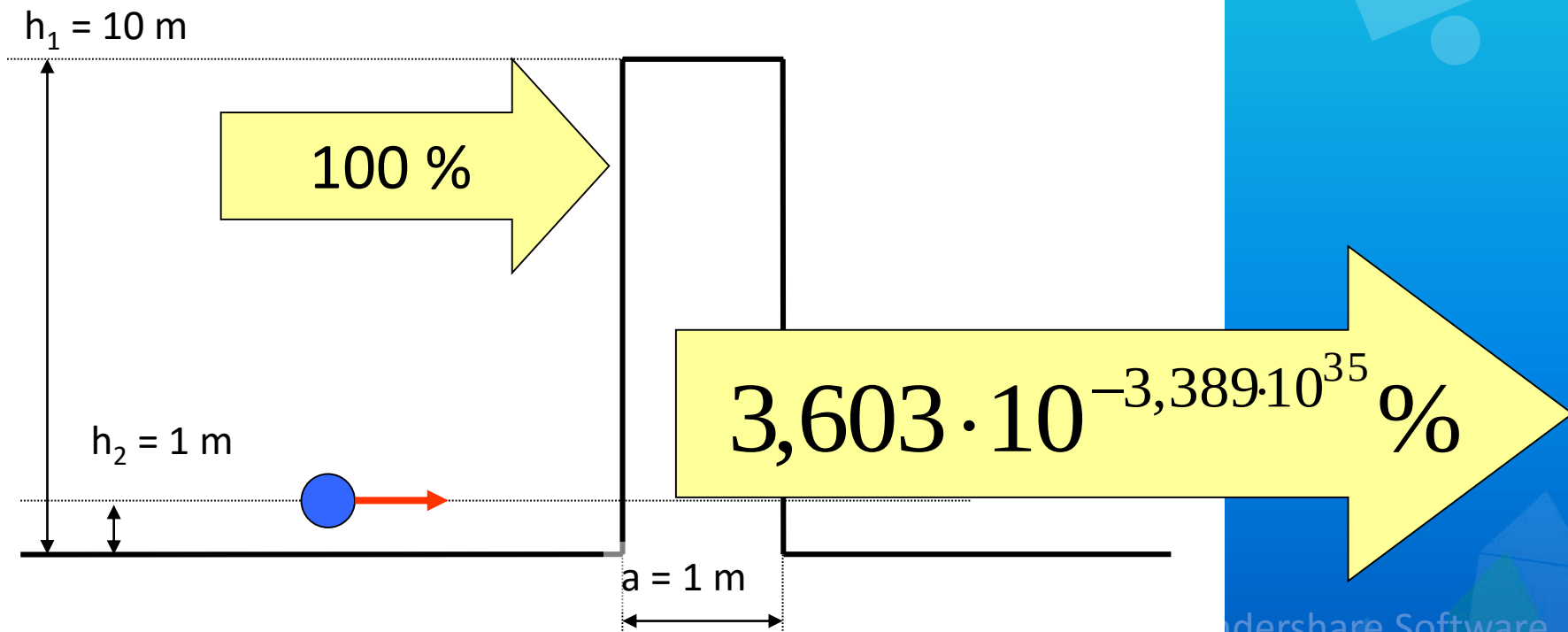


Logické důsledky:

- Narazíme-li na zeď, tak existuje nenulová pravděpodobnost, že jí projdeme.
- Jestliže nás zasáhne střela z pistole, existuje nemulová pravděpodobnost, že se od nás pouze neškodně odrazí zpět.

Příklad

- Mám hmotnost 80 kg a jsem schopen vyskočit do výšky maximálně 1m.
S jakou pravděpodobností překonám zeď 10 m vysokou a 1 m širokou?



Příklad

- Kdyby však náš svět byl kvantový

$$\hbar = 100 \text{ Js}$$

